

# 凸集并集的体积估计与三维挂谷集猜想

Hong Wang\*

Joshua Zahl†

2025 年 2 月 26 日

## 摘要

我们研究  $\mathbb{R}^3$  中的  $\delta$ -管族, 并要求同一个凸集  $V$  内不能容纳过多这样的管。我们证明, 此类管族的并集必定具有几乎最大的体积。作为推论, 我们证明  $\mathbb{R}^3$  中每个挂谷集的 Minkowski 维数与 Hausdorff 维数均为 3。

## 目录

|          |                                             |           |
|----------|---------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>引言</b>                                   | <b>3</b>  |
| 1.1      | 定理 1.2 与多尺度分析                               | 4         |
| 1.2      | 凸集的并与非聚集                                    | 4         |
| 1.3      | 由断言 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 推出挂谷集猜想   | 7         |
| 1.4      | $\mathbb{R}^3$ 中挂谷集猜想的证明理念与既有工作             | 8         |
| 1.5      | 证明概览                                        | 9         |
| 1.6      | 管倍增与 Keleti 线段延拓猜想                          | 14        |
| 1.7      | 致谢                                          | 15        |
| <b>2</b> | <b>证明梗概</b>                                 | <b>15</b> |
| 2.1      | 命题 1.6: 断言 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{E}$ 等价 | 15        |
| 2.2      | 双尺度颗粒分解                                     | 18        |
| 2.3      | 精细尺度归纳                                      | 20        |
| 2.4      | 多尺度结构、Nikishin–Stein–Pisier 因子分解与黏性挂谷       | 21        |

---

\*纽约大学 Courant 数学科学研究所, 美国纽约州纽约市。

†不列颠哥伦比亚大学数学系, 加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华市。

|          |                                                                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b> | <b>记号</b>                                                                                               | <b>22</b> |
| 3.1      | 凸集与着色                                                                                                   | 22        |
| 3.2      | 记号表                                                                                                     | 23        |
| <b>4</b> | <b>Wolff 公理与凸集因子分解</b>                                                                                  | <b>24</b> |
| 4.1      | 定义: Wolff 公理与覆盖                                                                                         | 24        |
| 4.2      | 凸集的因子分解                                                                                                 | 25        |
| 4.3      | 凸集与 Frostman 薄板 Wolff 公理                                                                                | 29        |
| 4.4      | Frostman 薄板 Wolff 公理与覆盖                                                                                 | 33        |
| <b>5</b> | <b>将管因子分解到扁平棱柱中</b>                                                                                     | <b>35</b> |
| 5.1      | 若干常用的 Córdoba 型 $L^2$ 论证                                                                                | 37        |
| 5.1.1    | 薄板的体积估计                                                                                                 | 37        |
| 5.1.2    | 棱柱的切向相交与横截相交                                                                                            | 38        |
| 5.2      | 断言 $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{E}$ 与 $\tilde{\mathcal{E}}$ 等价                                             | 41        |
| 5.3      | 命题 5.1 的证明: 经由扁平盒因子分解的管                                                                                 | 45        |
| 5.4      | 命题 5.2 的证明: 两个尺度上的因子分解                                                                                  | 48        |
| 5.5      | 组织到薄板中的管                                                                                                | 48        |
| <b>6</b> | <b>断言 <math>\mathcal{D}</math> 与 <math>\mathcal{E}</math> 等价</b>                                        | <b>50</b> |
| 6.1      | 命题 6.3 的证明: 因子分解三分法                                                                                     | 55        |
| <b>7</b> | <b><math>\mathbb{R}^3</math> 中管族的双尺度颗粒分解</b>                                                            | <b>59</b> |
| 7.1      | 宽广性                                                                                                     | 61        |
| 7.2      | 宽广性与 Frostman 薄板 Wolff 公理                                                                               | 65        |
| 7.3      | 迭代的基始情形: Guth 颗粒分解                                                                                      | 68        |
| 7.4      | 操作 #1、#2、#3: 平行结构                                                                                       | 69        |
| 7.5      | 利用操作 #1、#2、#3 证明命题 7.5                                                                                  | 71        |
| <b>8</b> | <b>操作 #1、#2 与 #3</b>                                                                                    | <b>73</b> |
| 8.1      | 操作 #1: 用更长的颗粒替换原颗粒, 以保证 $c \geq \delta \zeta_{\frac{\rho}{\delta}}(\#\mathbb{T}_{\rho})/(\#\mathbb{T})$ | 73        |
| 8.2      | 操作 #2: 用更长的颗粒替换方形颗粒                                                                                     | 73        |

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| 8.3 操作 #3: 用局部 $C_{KT-CW}^{\text{loc}}$ 较小的更宽颗粒替换原颗粒 . . . . . | 84         |
| <b>9 精细尺度归纳论证</b>                                              | <b>98</b>  |
| <b>10 每一尺度均满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理的管族之黏性挂谷定理</b>                | <b>101</b> |
| 10.1 Nikishin–Stein–Pisier 因子分解与凸 Wolff 公理 . . . . .           | 102        |
| <b>11 多尺度分析与命题 1.7 的证明</b>                                     | <b>108</b> |
| <b>12 管倍增</b>                                                  | <b>111</b> |
| <b>A <math>\mathbb{R}^3</math> 中管族的颗粒分解</b>                    | <b>113</b> |
| <b>B Wolff 的发刷论证与命题 1.8 的证明</b>                                | <b>122</b> |

## 1 引言

挂谷集是  $\mathbb{R}^n$  的一个紧子集, 其中包含沿每一个方向指向的单位线段。挂谷集猜想断言:  $\mathbb{R}^n$  中每个挂谷集的 Minkowski 维数和 Hausdorff 维数都等于  $n$ 。Davies 在  $n = 2$  时证明了该猜想 [5]; 在三维及更高维中, 该问题此前仍未解决。关于挂谷猜想的介绍和历史进展综述, 参见 [17, 28]; 关于三维及更高维的当前进展, 参见 [15, 16, 18, 20, 21, 27, 31]。

本文旨在对  $\mathbb{R}^3$  中满足若干非聚集条件的  $\delta$ -管并集给出体积下界。这里,  $\delta$ -管是单位线段的  $\delta$ -邻域。作为推论, 我们解决三维挂谷集猜想。

**定理 1.1.**  $\mathbb{R}^3$  中每个挂谷集的 *Minkowski* 维数与 *Hausdorff* 维数均为 3。

定理 1.1 是下面这一略具技术性的结果的推论。

**定理 1.2.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K > 1$ , 使得当  $\delta > 0$  充分小时, 下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  是包含在  $\mathbb{R}^3$  单位球中的一族  $\delta$ -管, 并假设任意尺寸为  $a \times b \times 2$  的长方棱柱至多包含  $\mathbb{T}$  中的  $100ab\delta^{-2}$  根管 (例如, 当  $\mathbb{T}$  中各管的方向彼此  $\delta$ -分离时, 该条件成立)。对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 设  $Y(T) \subset T$  为可测集, 且  $|Y(T)| \geq \lambda|T|$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \delta^\varepsilon \lambda^K \sum_{T \in \mathbb{T}} |T|. \quad (1.1)$$

挂谷极大函数猜想断言: 对每个  $\varepsilon > 0$ , 不等式 (1.1) 可取  $K = 3$ 。Córdoba 已在  $\mathbb{R}^2$  中证明挂谷极大函数猜想 [6]。虽然本文并未解决  $\mathbb{R}^3$  中的挂谷极大函数猜想, 但定理 1.2 给出的较弱结论已足以推出定理 1.1。

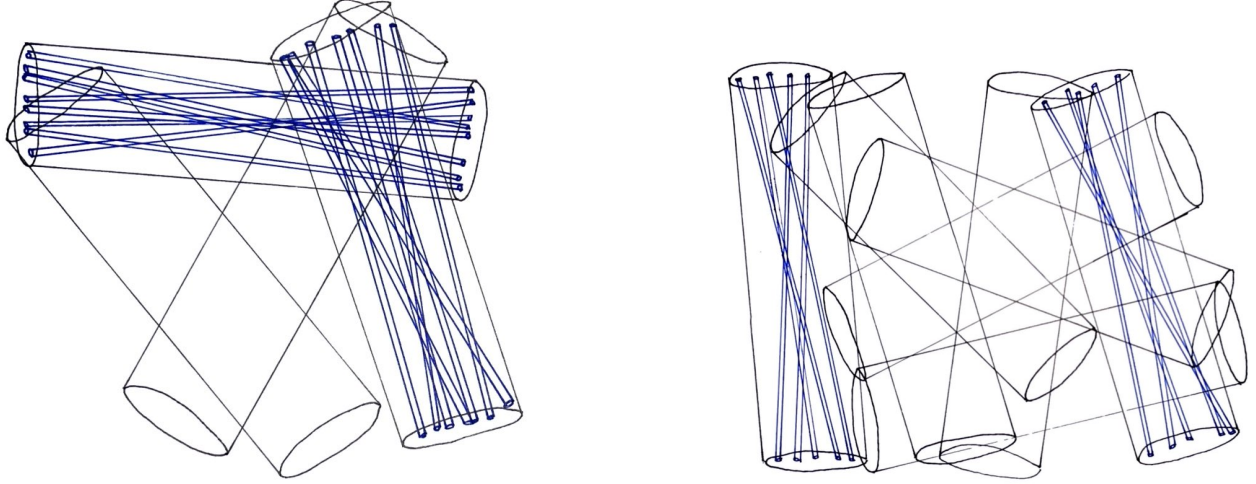


图 1: 左: 尺度  $\rho$  的管 (黑色) 满足定理 1.2 的非集中假设; 每根  $\rho$ -管内部经重标度后的  $\delta$ -管 (蓝色) 也满足该假设。在这种情形下, 多尺度分析较为直接, 通常称为“黏性”情形。为使图形清楚, 并未画出全部  $\delta$ -管。

右: 尺度  $\rho$  的管不满足定理 1.2 的非集中假设。 $\rho$ -管以高重数相交, 而每根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管较为稀疏。

“任意  $a \times b \times 2$  长方棱柱至多包含  $100ab\delta^{-2}$  根  $\mathbb{T}$  中的管”是一种非聚集条件。Wolff 在 [27] 中首次引入了与之十分接近的条件; 满足该条件的管族称为满足 Wolff 公理。

## 1.1 定理 1.2 与多尺度分析

作者在 [25, 26] 中证明: 当管族  $\mathbb{T}$  具有所谓的黏性时, 定理 1.2 成立 (见图 1 左图)。粗略地说, 若  $\mathbb{T}$  满足定理 1.2 中的非聚集条件; 其基数约为  $\delta^{-2}$ ; 并且对每个中间尺度  $\delta \leq \rho \leq 1$ ,  $\mathbb{T}$  中的管都可以由一族  $\rho$ -管覆盖, 而该  $\rho$ -管族在用  $\rho$  替代  $\delta$  后仍满足定理 1.2 的非聚集条件, 则称  $\mathbb{T}$  是黏性的。

遗憾的是, 并非所有管族都具有黏性——图 1 右图给出了一个例子。右图中的排列难以分析, 因为  $\rho$ -管以很高的重数相交 (即一个典型点会有许多  $\rho$ -管通过), 而每根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管排列却很稀疏 (即每根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管并集仅填充该  $\rho$ -管的一小部分)。为了分析这种排列, 第 1.2 节将引入定理 1.2 中非聚集假设的两个变体, 以及体积估计 (1.1) 的两个变体。

## 1.2 凸集的并与非聚集

以下称两个集合  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  本质不同, 如果  $|U \cap V| \leq \frac{1}{2} \max(|U|, |V|)$ 。 $\mathbb{T}$  表示包含在  $\mathbb{R}^3$  单位球中的一族本质不同的  $\delta$ -管, 而  $|T|$  表示一根  $\delta$ -管的体积, 即  $|T|$  的数量级约为  $\delta^2$ 。

定义 1.3. 设  $\mathbb{T}$  为  $\mathbb{R}^3$  中的一族  $\delta$ -管。

(A) 定义  $C_{KT-CW}(\mathbb{T})$  为所有满足下述条件的  $C > 0$  的下确界:

$$\#\{T \in \mathbb{T}: T \subset W\} \leq C|W||T|^{-1} \quad \text{对所有凸集 } W \subset \mathbb{R}^3.$$

称  $\mathbb{T}$  以误差  $C_{KT-CW}(\mathbb{T})$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。

(B) 定义  $C_{F-SW}(\mathbb{T})$  为所有满足下述条件的  $C > 0$  的下确界:

$$\#\{T \in \mathbb{T}: T \subset W\} \leq C|W|(\#\mathbb{T}) \quad \text{对所有薄板 } W \subset \mathbb{R}^3,$$

其中, “薄板” 是单位球与某个 (超) 平面的加厚邻域之交。称  $\mathbb{T}$  以误差  $C_{F-SW}(\mathbb{T})$  满足 Frostman 薄板 Wolff 公理。

注 1.4.

(A) 关于名称。“Katz–Tao” 和 “Frostman” 指两种不同类型的非集中条件; 它们分别对应于经典的非集中条件  $|E \cap B| \leq (r/\delta)^2$  与  $|E \cap B| \leq r^2|E|$ , 其中  $E \subset \mathbb{R}^n$  是  $\delta$ -分离集,  $B$  是半径为  $r$  的球。由挂谷集产生的管排列, 即在每个彼此  $\delta$ -分离的方向上各取一根  $\delta$ -管, 同时以误差  $\lesssim 1$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理和 Frostman 薄板 Wolff 公理。“凸” 和 “薄板” 说明非聚集条件施加于哪一类集合; “Wolff 公理” 则表示上述定义是 [27] 中 Wolff 公理的类似物。

(B) 上述定义是第 4.2 节将定义的一般非聚集条件 (定义 1.3') 的两个特殊情形。在定义 1.3' 中, 管与凸集 (或薄板) 都将由更一般的对象替代。

(C) 若  $\mathbb{T}$  非空, 取一个包含  $\mathbb{T}$  中某根管的  $\delta \times 1 \times 1$  薄板  $W$ , 即可看出  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq C$  蕴含  $\#\mathbb{T} \geq C^{-1}\delta^{-1}$ 。

下面引入  $\mathbb{R}^3$  中管并集的两个挂谷型体积估计。它们是不等式 (1.1) 的类似形式, 并经过精心表述以适应尺度归纳。以下用  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  表示一族本质不同的  $\mathbb{R}^3$  中  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  及其着色: 对每个  $T \in \mathbb{T}$ ,  $Y(T)$  是  $T$  的一个子集。对  $\lambda > 0$ , 若  $\sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)| \geq \lambda \sum_{T \in \mathbb{T}} |T|$ , 则称  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\lambda$ -稠密。

定义 1.5. 设  $\sigma, \omega \geq 0$ 。

- 称断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立, 如果:

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 并且以至多  $\delta^{-\eta}$  的误差同时满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理与 Frostman 薄板 Wolff 公理。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (1.2)$$

- 称断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立, 如果:

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} \ell (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad (1.3)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ,  $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。

下面说明估计 (1.2) 与 (1.3) 中各指数的数量关系。首先, 在  $\sigma = \omega$  的特殊情形, 断言  $\mathcal{D}(\sigma, \sigma)$  给出估计

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^\varepsilon (\#\mathbb{T})^{-\sigma} \sum_{T \in \mathbb{T}} |T|,$$

也就是说, 在并集  $\bigcup Y(T)$  的一个典型点处, 通过的管数至多为  $\lesssim \delta^{-\varepsilon} (\#\mathbb{T})^\sigma$  (对一般的  $\sigma$  和  $\omega$ , 该数量约为  $\delta^{\sigma-\omega-\varepsilon} (\#\mathbb{T})^\sigma$ )。当  $\sigma > 0$  很小时, 这表示并集  $\bigcup Y(T)$  中的管几乎互不重叠。后续论证中还需要处理  $\sigma$  与  $\omega$  不相等的情形。

估计 (1.2) 的形式部分源于如下考虑。为了启动尺度归纳论证, 我们希望证明某个  $\sigma \in (0, 2/3]$  下  $\mathcal{E}(\sigma, 0)$  成立。当  $\sigma = 1/2$  且  $\omega = 0$  时, 不等式 (1.2) 化为

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{1/2+\varepsilon} (\delta^2 \#\mathbb{T})^{1/2}.$$

这本质上就是 [27] 中 Wolff 的发刷下界 (这里使用了  $\mathbb{T}$  以较小误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理这一事实; 详见附录 B)。

断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  是断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的特殊情形。下面解释不等式 (1.3) 最后一个括号项的结构。为了理解参数  $\ell$ , 考虑如下情形。假设断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  已知成立。取  $\delta < \rho < 1$ , 并令  $\mathbb{T}$  为共同包含在一根  $\rho$ -管 (记为  $T_\rho$ ) 内、基数为  $(\rho/\delta)^2$  的  $\delta$ -管族。假设  $\mathbb{T}$  中的管以约为 1 的误差满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。这蕴含  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \sim \rho^{-1}$ 。

对  $T \in \mathbb{T}$  (因此  $T \subset T_\rho$ ), 记  $T^{T_\rho}$  为如下仿射变换下  $T$  的像: 在  $T_\rho$  的两个“短”方向上各向异性地放大  $\rho^{-1}$  倍, 并把所得像平移到单位球。经过这一重标度和平移,  $\mathbb{T}$  中的管成为  $\delta/\rho$ -管, 并以约为 1 的误差同时满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理与 Frostman 薄板 Wolff 公理。对该重标度管族应用断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ , 得到体积下界

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T^{T_\rho} \right| \geq \kappa (\delta/\rho)^\varepsilon (\#\mathbb{T}) |T^{T_\rho}| ((\#\mathbb{T}) |T^\rho|^{1/2})^{-\sigma}.$$

撤销各向异性重标度和平移 (该变换使体积改变因子  $\rho^2$ ), 并注意  $|T^{T_\rho}| \sim \rho^2 |T|$ , 可将上式改写为

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrsim \kappa \delta^\varepsilon (\#\mathbb{T}) |T| (\ell (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad \text{其中 } \ell = C_{F-SW}(\mathbb{T}) \sim \rho^{-1}.$$

参数  $\ell$  的另一项解释是: 对任意  $\delta$ -管族  $\mathbb{T}$ , 总有  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \geq 1$ 。这是因为总能取一个厚度为  $|T|^{1/2}$  且至少包含  $\mathbb{T}$  中一根管的薄板  $W$ 。这也解释了为什么写  $|T|^{1/2}$  而不是  $\delta$ ;  $\mathbb{R}^3$  中任意直径为 1 的凸集  $S$  都可以包含在厚度为  $|S|^{1/2}$  的薄板中。后文还会考虑断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的推广, 其中管族被更一般的凸集族取代。

为了理解不等式 (1.3) 中的  $m^{-1}$  与  $m^{-3/2}$ , 考虑如下情形。仍假设断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立。设  $\mathbb{T}$  是一族  $\delta$ -管, 以约为 1 的误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理, 而 Katz–Tao 凸 Wolff 公理的误差为  $m \gg 1$ 。令  $\rho = m^{1/2} \delta$ , 并假设存在一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 其中每根管包含  $m |T_\rho| |T|^{-1} = m^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管。

这正是一根  $\rho$ -管中能够容纳的本质不同  $\delta$ -管的最大数量。因此，每根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管并集几乎填满整根  $\rho$ -管。

我们有  $\#\mathbb{T}_\rho = m^{-2}(\#\mathbb{T}) = m^{-1}(|T|/|T_\rho|)(\#\mathbb{T})$ ，即  $(\#\mathbb{T}_\rho)|T_\rho| = m^{-1}(\#\mathbb{T})|T|$ 。容易算得  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim 1$ 。应用断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ ，并利用每根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管并集几乎填满该  $\rho$ -管这一事实，得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| &\sim \left| \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} T_\rho \right| \geq \kappa \rho^{\omega+\varepsilon} (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho| (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho|^{1/2})^{-\sigma} \\ &= \kappa \rho^{\omega+\varepsilon} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \end{aligned}$$

### 1.3 由断言 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 推出挂谷集猜想

显然  $\mathcal{E}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{D}(\sigma, \omega)$ 。第 6 节将证明反向蕴含也成立：

**命题 1.6.** 设  $0 \leq \sigma \leq 2/3$ ,  $\omega \geq 0$ 。则  $\mathcal{E}(\sigma, \omega) \iff \mathcal{D}(\sigma, \omega)$ 。

如上所述，证明使用尺度归纳。简言之，若  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立，我们将在许多位置和尺度上使用这一事实，证明某个  $\omega' < \omega$  下的  $\mathcal{D}(\sigma, \omega')$  成立（注意， $\omega$  越小，估计越强）。精确陈述如下。

**命题 1.7.** 存在函数  $g: [0, 2/3] \times (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ ，使得下述结论成立。设  $0 \leq \sigma \leq 2/3$ ,  $\omega > 0$ 。则  $\mathcal{E}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{D}(\sigma, \omega - g(\sigma, \omega))$ 。

命题 1.6 与 1.7 使  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ （等价地， $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ ）具有自我改进性质。由于  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{D}$  定义中的管族彼此本质不同且包含在单位球内，总有  $\#\mathbb{T} \lesssim \delta^{-4}$ ，因此可以把  $\omega$  的改进“交换”为  $\sigma$  的改进。特别地，命题 1.7 给出  $\mathcal{E}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{D}(\sigma - g(\sigma, \omega)/4, \omega)$ 。

反复应用命题 1.6 与 1.7，可以把初始估计  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  提升为  $\mathcal{D}(\sigma - g(\sigma, \omega)/4, \omega)$ ，并继续迭代。为了启动迭代，需要先证明某个  $\omega > 0$ 、 $0 \leq \sigma \leq 2/3$  下  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立。Wolff 在 [27] 中证明， $\mathbb{R}^n$  中每个挂谷集的 Hausdorff 维数至少为  $\frac{n+2}{2}$ 。附录 B 将使用类似论证证明  $\mathcal{D}(1/2, 0)$  成立：

**命题 1.8.**  $\mathcal{D}(1/2, 0)$  成立。

以命题 1.8 为起点，反复应用命题 1.6 与 1.7，得到下述结论。

**定理 1.9.** 断言  $\mathcal{D}(0, 0)$  与  $\mathcal{E}(0, 0)$  均成立。

证明. 固定  $\omega > 0$ 。由命题 1.8,  $\mathcal{D}(1/2, 0)$  成立，从而  $\mathcal{D}(1/2, \omega)$  也成立。若某个  $\sigma \in [0, 2/3]$  下  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立，则对所有  $\sigma' \in [\sigma, 2/3]$ ,  $\mathcal{D}(\sigma', \omega)$  也成立。利用命题 1.6 与 1.7，集合  $\{\sigma \in [0, 2/3]: \mathcal{D}(\sigma, \omega) \text{ 成立}\}$  在度量空间  $[0, 2/3]$  中相对开。另一方面，由定义 1.5 容易验证该集合在  $[0, 2/3]$  中也相对闭。因此， $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  对所有  $\sigma \in [0, 2/3]$  均成立，特别地， $\mathcal{D}(0, \omega)$  成立。

类似论证说明  $\mathcal{D}(0, 0)$  成立：我们已经证明每个  $\omega > 0$  下  $\mathcal{D}(0, \omega)$  成立；另一方面，集合  $\{\omega \geq 0: \mathcal{D}(0, \omega) \text{ 成立}\}$  在度量空间  $[0, \infty)$  中相对闭。因此  $\mathcal{D}(0, 0)$  成立。由命题 1.6,  $\mathcal{E}(0, 0)$  也成立。□

定理 1.9 的结论可以改述如下。

**推论 1.10.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K$ , 使得当  $\delta > 0$  充分小时, 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\lambda$ -稠密。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \delta^\varepsilon \lambda^K m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T|, \quad \text{其中 } m = C_{KT-CW}(\mathbb{T}). \quad (1.4)$$

定理 1.2 现为推论 1.10 的特殊情形——定理 1.2 的假设保证  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq 1000$ 。

## 1.4 $\mathbb{R}^3$ 中挂谷集猜想的证明理念与既有工作

Katz、Łaba 与 Tao 在 [16] 中证明,  $\mathbb{R}^3$  中每个挂谷集的上 Minkowski 维数至少为  $5/2 + c$ , 其中  $c > 0$  是一个很小的绝对常数。为此, 他们分析了一个假想的、上 Minkowski 维数接近  $5/2$  的  $\mathbb{R}^3$  挂谷集结构。他们证明, 这样的挂谷集——更准确地说, 由该挂谷集产生的  $\delta$ -管族——必须具有三种结构性质, 称为“平面性” (planiness)、“颗粒性” (graininess) 和“黏性” (stickiness)。随后 Katz、Łaba 与 Tao 又证明, 具有这三种结构性质的挂谷集维数至少为  $5/2 + c$ 。

2014 年, Tao 在一次报告及配套博客文章 [24] 中介绍了 Katz 与 Tao 为解决挂谷问题提出的一种可能途径, 即 Katz–Tao 纲领。其步骤如下。第一, 证明  $\mathbb{R}^3$  中挂谷猜想的任何假想反例——即维数严格小于 3 的挂谷集——都必须具有平面性、颗粒性和黏性。第二, 利用这些性质逐步获得挂谷集多尺度结构的更精确描述。第三, 使用离散化和积理论的结果, 特别是 Bourgain 离散化和积定理 [4] 的思想, 证明具有这种多尺度结构的挂谷集不可能存在。

Tao 提出 Katz–Tao 纲领时, 上述第一步已经取得了一些进展。Bennett–Carbery–Tao 多线性挂谷定理 [1] 蕴含,  $\mathbb{R}^3$  中任何假想反例都必须具有平面性。Guth 在 [9] 中证明,  $\mathbb{R}^3$  中任何假想反例都必须具有颗粒性。相比之下, 黏性似乎更难处理。

论文 [25, 26] 与本文组成的三部曲, 可以看作 Katz–Tao 纲领的实现。在 [25] 中, 作者绕开 Katz–Tao 纲领的第一步, 直接处理第二步和第三步。更准确地说, 作者证明  $\mathbb{R}^3$  中每个黏性挂谷集 (即具有黏性结构性质的挂谷集) 的 Hausdorff 维数都等于 3。该结果称为黏性挂谷定理。关于该定理的证明以及这一证明与 Katz–Tao 纲领所述策略的比较, 参见 [25, §1.1]。

在 [26] 中, 作者证明任何 Assouad 维数严格小于 3 的假想  $\mathbb{R}^3$  挂谷集都必须具有黏性。更准确地说, 若存在挂谷集  $K$  满足  $\dim_A(K) < 3$ , 则还必定存在挂谷集  $K'$  满足  $\dim_A(K') < 3$ , 并具有类似于黏性的多尺度自相似性质。随后作者利用黏性挂谷定理的一个轻微推广, 证明这种挂谷集不可能存在。特别地, [25] 中的黏性挂谷定理假定来自挂谷集的管指向不同方向; 在 [26] 中, 作者将该定理推广到较弱的假设, 即管族在每个尺度都满足 Wolff 公理 (精确定义见第 6 节)。注意, 由于集合的 Assouad 维数可能大于其 Minkowski 维数或 Hausdorff 维数, [26] 的结果尚未解决  $\mathbb{R}^3$  中的挂谷集猜想。

本文把上述思路推进到终点。我们证明: 若  $\mathbb{T}$  是一族  $\delta$ -管, 并且对某些  $\sigma$  和  $\omega$ , 它使断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中的估计 (1.2) 几乎取等, 则  $\mathbb{T}$  必须具有类似黏性的多尺度自相似性质。具体而言, 在  $\delta$

与 1 之间的许多尺度  $\rho$  上, 可以用一族以较小误差满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理 (见定义 1.3) 的  $\rho$ -管覆盖  $\mathbb{T}$ 。然后, 我们利用黏性挂谷定理的推广证明: 对这样的管族  $\mathbb{T}$ , 只有  $\sigma$  与  $\omega$  均为 0 时, 断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中的估计 (1.2) 才可能取等。正如第 1.2 节已经说明的, 这意味着  $\mathbb{R}^3$  中每个挂谷集 (事实上, 每个满足 Wolff 公理的集合) 的 Minkowski 维数和 Hausdorff 维数均为 3。

## 1.5 证明概览

命题 1.7 是定理 1.9 证明中最关键的一步, 而定理 1.9 又推出定理 1.1 与 1.2。本节讨论图 1 右图所示关键特殊排列中, 用于证明该命题的一些思想。第 2 节将给出更完整、且与正式证明结构一致的证明梗概。

为简化叙述, 我们忽略  $\delta^\varepsilon$  或  $\delta^{-\varepsilon}$  型因子, 并非正式地写  $A \lesssim B$ , 表示  $A \leq C\delta^{-\varepsilon}B$ , 其中常数  $C$  与  $\delta$  无关, 而小参数  $\varepsilon > 0$  在本概览中不再追踪。

固定  $\sigma > 0$  和  $\omega > 0$ , 并假设断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  与  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  均成立 (粗略地说, 这表示管并集的“维数”至少为  $3 - \sigma - \omega$ )。设  $\mathbb{T}$  是一族基数约为  $\delta^{-2}$ 、满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  假设的  $\delta$ -管。目标是证明  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T$  的体积显著大于估计 (1.2) 所保证的下界, 即希望得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrsim \delta^{\sigma+\omega-\alpha}, \quad (1.5)$$

其中  $\alpha = \alpha(\sigma, \omega) > 0$ 。

假设存在一个重数  $\mu$ , 使得  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T$  中每个点约有  $\mu$  根  $\mathbb{T}$  中的管通过。得到目标体积下界 (1.5) 的一种办法, 是转而证明重数估计

$$\mu \lesssim \delta^{-\sigma-\omega+\alpha}. \quad (1.6)$$

得到 (1.5) 的第二种办法, 是证明存在某个尺度  $\tau \gg \delta$ , 使并集  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T$  在尺度  $\tau$  上具有高于预期的密度。更具体地, 只要对与  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T$  相交的一个典型半径  $\tau$  球  $B_\tau$ , 证明

$$\left| B_\tau \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrsim \delta^{-\alpha} (\delta/\tau)^{\sigma+\omega} |B_\tau|. \quad (1.7)$$

即可推出 (1.5)。下文“步骤 2, 情形 2”将进一步说明这一点。

若  $\mathbb{T}$  具有黏性, 则对每个尺度  $\delta < \rho < 1$ , 可以找到一族约由  $\rho^{-2}$  根本质不同的  $\rho$ -管组成的  $\mathbb{T}_\rho$ , 其中每根  $\rho$ -管包含约  $(\delta/\rho)^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管。下面改而假设  $\mathbb{T}$  不具有黏性, 即  $\mathbb{T}$  类似图 1 右图中的排列。称这一点为简化假设 A。更准确地说, 存在尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$  和一族本质不同的  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 使每个  $T \in \mathbb{T}$  至少包含在  $\mathbb{T}_\rho$  中的一根管内, 而每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  包含约  $\delta^\nu (\rho/\delta)^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管, 其中  $\nu > 0$  很小。我们将尝试以某个小改进  $\alpha > 0$  证明不等式 (1.6)。

### 细尺度估计。

对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 定义

$$\mathbb{T}[T_\rho] = \{T \in \mathbb{T} : T \subset T_\rho\} \quad \text{且} \quad \mathbb{T}^{T_\rho} = \{T^{T_\rho} : T \in \mathbb{T}[T_\rho]\}. \quad (1.8)$$

(回顾定义 1.5 之后关于  $T^{T_\rho}$  的定义。) 假设对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  中的管都满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设; 称这一点为简化假设  $B$ 。定义  $\mu_{\text{fine}}$  为通过  $\bigcup_{\mathbb{T}^{T_\rho}} T^{T_\rho}$  中一个典型点的  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  中管的数量 (不妨假设该数对  $\mathbb{T}_\rho$  中每根  $\rho$ -管均相同)。对每个管族  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  应用断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ , 并结合定义 1.5 之后的讨论, 得到

$$\mu_{\text{fine}} \lesssim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\sigma-\omega} (\#\mathbb{T}[T_\rho])^\sigma \leq \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\sigma-\omega} \left(\delta^\nu \frac{\rho^2}{\delta^2}\right)^\sigma = \delta^{\nu\sigma} \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\sigma+\omega}, \quad (1.9)$$

其中第二个不等式使用了假设  $\#\mathbb{T}[T_\rho] \leq \delta^\nu(\rho/\delta)^2$ 。

不等式 (1.9) 控制共同位于一根  $\rho$ -管内部的  $\delta$ -管的典型相交重数。再定义  $\mu_{\text{coarse}}$  如下: 对  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  中一个典型点  $x$ , 约有  $\mu_{\text{coarse}}$  根不同的  $\rho$ -管  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  满足  $x \in \bigcup_{\mathbb{T}[T_\rho]} T$ 。按此定义, 有

$$\mu \sim \mu_{\text{fine}} \mu_{\text{coarse}}. \quad (1.10)$$

以往研究通常考虑 (1.10) 的较弱形式  $\mu \lesssim \mu_{\text{fine}} \mu_{\mathbb{T}_\rho}$ , 其中  $\mu_{\mathbb{T}_\rho}$  是通过  $\bigcup_{\mathbb{T}_\rho} T_\rho$  中一个典型点的  $\mathbb{T}_\rho$  中管的数量。采用更精确的估计 (1.10) 是本文证明的一个关键新要素。

由 (1.9) 可见, 只要证明

$$\mu_{\text{coarse}} \lesssim \rho^{-\sigma-\omega}. \quad (1.11)$$

便能得到目标重数界 (1.6)。

一个朴素想法是利用  $\mu_{\text{coarse}} \leq \mu_{\mathbb{T}_\rho}$ , 再以断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  控制后者。然而, 这并不能推出 (1.11), 因为在本证明概览所考虑的情形中,  $\mathbb{T}_\rho$  的基数显著大于  $\rho^{-2}$ 。

### 粗尺度估计, 步骤 1: 颗粒分解。

固定一根管  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ 。利用 Guth 在 [9] 中颗粒分解的一个变体, 可以假设  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  中的  $\delta/\rho$ -管排列成“颗粒”, 即尺寸为  $\delta/\rho \times c \times c$  的长方棱柱, 其中  $c \geq \frac{\rho}{\delta}(\#\mathbb{T}[T_\rho])^{-1}$  (关于  $\#\mathbb{T}[T_\rho]$  的假设保证  $c \gg \delta/\rho$ )。全文约定: 提及尺寸为  $a \times b \times c$  的长方棱柱时, 总有  $a \leq b \leq c$ 。

于是  $E_{T_\rho} = \bigcup_{\mathbb{T}^{T_\rho}} T^{T_\rho}$  可以由一族基本互不相交的  $\delta/\rho \times c \times c$  长方棱柱覆盖, 并且每个这样的棱柱  $G$  与  $E_{T_\rho}$  的交都很大, 即  $|G \cap E_{T_\rho}| \gtrsim |G|$ ; 见图 2 左图。

撤销上述与  $T_\rho$  对应的各向异性重标度后,  $\bigcup_{\mathbb{T}[T_\rho]} T$  可由一族基本互不相交的  $\delta \times \rho c \times c$  长方棱柱覆盖; 见图 2 右图。对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  都有同样结论。记  $\mathcal{P}$  为所有  $\rho$ -管中产生的全部  $\delta \times \rho c \times c$  棱柱。要控制  $\mu_{\text{coarse}}$ , 只需控制  $\mathcal{P}$  中棱柱的典型相交重数。

### 粗尺度估计, 步骤 2: 颗粒的相交重数。

$\mathcal{P}$  中每个  $\delta \times \rho c \times c$  棱柱都有一个关联切平面, 其定义精度为  $\delta/(\rho c)$ 。假设  $\mathcal{P}$  中棱柱以“切向”方式相交, 即任意相交的  $P, P' \in \mathcal{P}$ , 其对应切平面在  $\delta/(\rho c)$  精度内一致。称这一点为简化假设  $C$ 。于是对每个点  $x$ , 所有包含  $x$  的  $\mathcal{P}$  中棱柱都包含在同一个尺寸约为  $\delta/\rho \times c \times c$  的棱柱内。因此, 可以把  $\mathcal{P}$  分成若干子族  $\mathcal{P} = \bigcup \mathcal{P}_i$ , 使得若两根棱柱相交, 则它们属于同一子族, 并且每个  $\mathcal{P}_i$  中的  $\delta \times \rho c \times c$  棱柱都包含在一个共同的、尺寸约为  $\delta/\rho \times c \times c$  的棱柱  $\square_i$  中; 见图 3 左图。

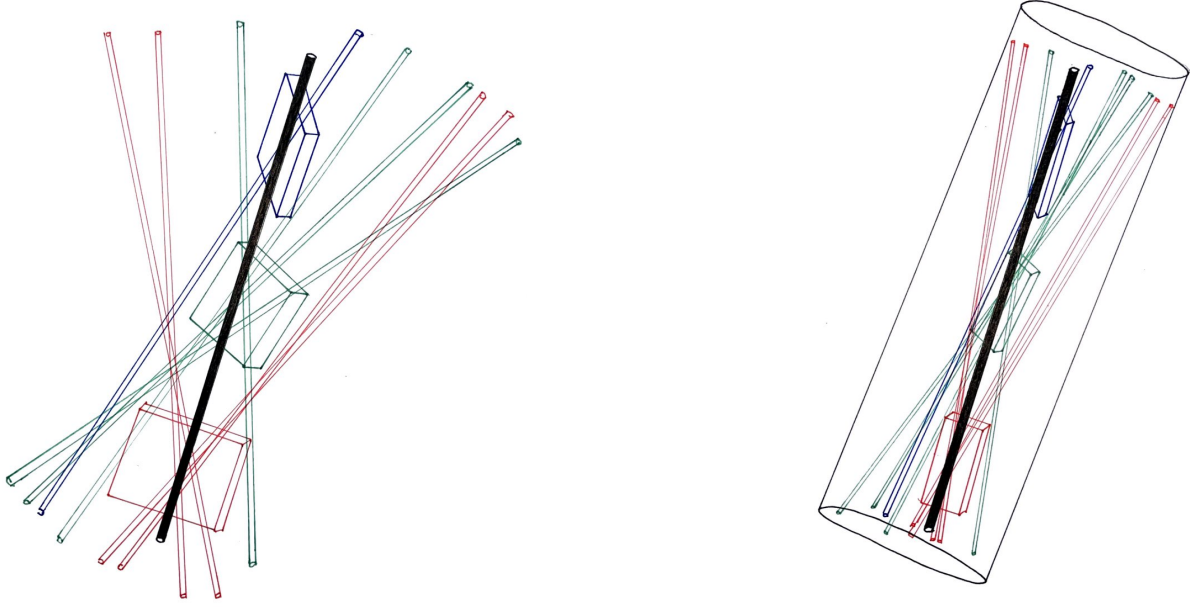


图 2: 左: 管族  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  与颗粒  $\{G\}$ 。为使图形清楚, 只画出与黑色管相交的颗粒和管, 而且其中大多数仍被省略; 通过红色颗粒的红色管填充该颗粒的相当大部分, 其他颗粒同理。对  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  中每根管, 情形均类似。

右: 撤销与  $T_\rho$  对应的各向异性重标度后, 图 2 左图的像。每个颗粒的尺寸由  $\delta/\rho \times c \times c$  变为  $\delta \times \rho c \times c$ 。

固定上述  $\mathcal{P}$  分割中的一个子族  $\mathcal{P}'$ , 令  $\square$  为与之关联的  $\delta/\rho \times c \times c$  棱柱。把  $\square$  各向异性地重标度为单位立方体后, 每个  $P \in \mathcal{P}'$  的像都是尺寸约为  $\rho \times \rho \times 1$  的棱柱 (见图 3 右图)。由于  $\rho \times \rho \times 1$  棱柱可与  $\rho$ -管比较, 我们略微滥用记号, 把这一棱柱族视为一族  $\rho$ -管, 记为  $\tilde{\mathbb{T}}$ 。于是估计  $\mu_{\text{coarse}}$  的任务化为估计  $\tilde{\mathbb{T}}$  中管的典型相交重数。

先验上, 我们对  $\tilde{\mathbb{T}}$  的结构一无所知。本文的一个关键新思想, 是使用一个结构定理找出一族凸集  $\mathcal{W}$ , 使  $\mathcal{W}$  以误差  $\lesssim 1$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理的适当类似形式, 并且对每个  $W \in \mathcal{W}$ , 集合

$$\tilde{\mathbb{T}}[W] = \{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}: \tilde{T} \subset W\}$$

满足以下关键性质:

1. 基数估计  $\#\tilde{\mathbb{T}}[W] \approx C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \cdot |W|/|\tilde{T}|$  (这里  $|\tilde{T}| \sim \rho^2$  表示  $\tilde{\mathbb{T}}$  中一根管的体积)。
2. 对任意凸集  $U \subset W$ , 有  $\#\tilde{\mathbb{T}}[U] \lesssim \frac{|U|}{|W|} \#\tilde{\mathbb{T}}[W]$ 。

图 5 给出这一过程的示意, 命题 4.6 给出精确陈述。

看一个特殊情形, 以说明这两个性质的含义。暂设  $W$  是某个  $\rho < \tau < 1$  的  $\tau$ -管, 则性质 1 表示: 把  $W$  重标度为单位立方体后,  $\tilde{\mathbb{T}}[W]$  变为一族基数  $\gtrsim C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})(\tau/\rho)^2$  的  $\rho/\tau$ -管。性质 2 是

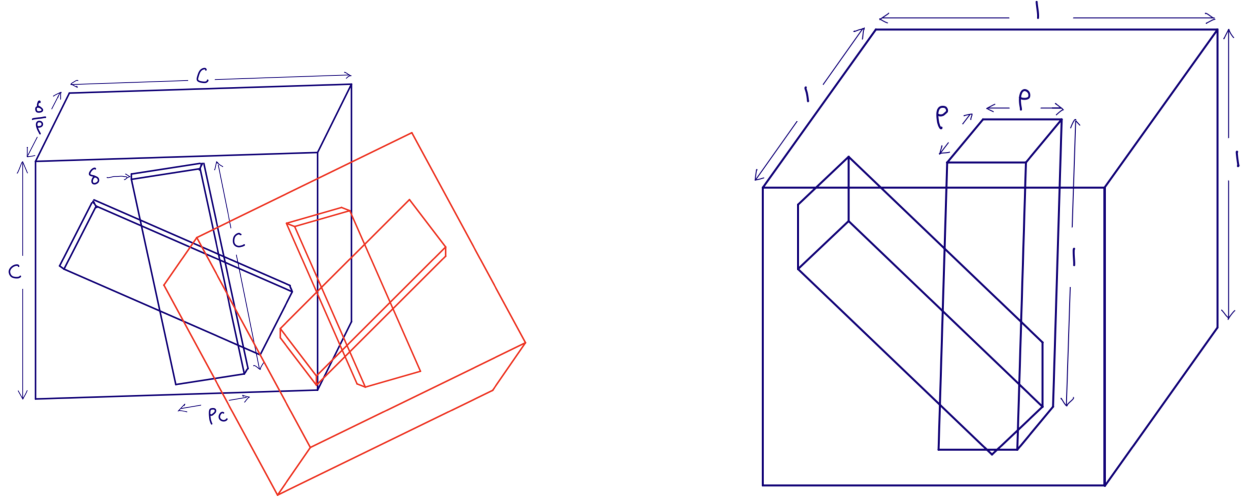


图 3: 左:  $\mathcal{P}$  的分割中两组  $\delta \times \rho c \times c$  棱柱 (分别为蓝色和红色), 以及包含它们的  $\delta/\rho \times c \times c$  棱柱  $\square$  与  $\square$ 。

右: 把蓝色的  $\delta/\rho \times c \times c$  棱柱  $\square$  各向异性地重标度为单位立方体后, 其中每个蓝色  $\delta \times \rho c \times c$  棱柱都变为一个  $\rho \times \rho \times 1$  棱柱 (可与  $\rho$ -管比较)。

[26] 首次引入的一种非集中条件; 满足该条件的管族称为满足 Frostman 凸 Wolff 公理。例如, 若在每个彼此  $\rho/\tau$ -分离的方向上约有  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})$  根平行的  $\rho/\tau$ -管, 则性质 1 与 2 均成立。Wolff 在 [29] 中曾研究这类管排列; 对满足这些性质的管并集所作的体积估计称为 X 射线估计。断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ , 特别是  $\mathcal{E}(1/2, 0)$ , 推广了 Wolff 在 [29] 中的 X 射线估计。因此, 当  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})$  显著大于 1 时, 应期待  $\bigcup_{\tilde{\mathbb{T}}[W]} \tilde{T}$  具有很大体积。详见下文情形 2。

下面将论证分为三种情形。

情形 1:  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \lesssim 1$ 。此时  $\mathcal{W}$  只含一个与单位球可比较的凸集。为简化本证明概览, 假设  $\tilde{\mathbb{T}}$  以误差  $\lesssim 1$  满足 Frostman 薄板 Wolff 公理, 于是  $\tilde{\mathbb{T}}$  满足断言  $D(\sigma, \omega)$  的假设; 这一简化可由若干这里不展开的重标度论证证明。特别地, 这意味着  $\#\tilde{\mathbb{T}} \lesssim \rho^{-2}$ , 从而应用断言  $D(\sigma, \omega)$  得到所需估计

$$\mu_{\text{coarse}} \lesssim \rho^{\sigma-\omega} (\#\tilde{\mathbb{T}})^{\sigma} \lesssim \rho^{-\sigma-\omega}.$$

情形 2:  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \gg 1$ , 且每个  $W \in \mathcal{W}$  的厚度  $t \gg \delta$ 。为处理这一情形, 先考虑如下类比。设  $\mathbb{T}$  是基数为  $m\delta^{-2}$  的  $\delta$ -管族, 其中  $m \gg 1$ ; 再假设  $\mathbb{T}$  以误差  $m$  满足 Katz-Tao 凸 Wolff 公理, 并以误差  $\sim 1$  满足 Frostman 薄板 Wolff 公理。则断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  说明  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  的体积  $\gtrsim m^{\sigma/2} \delta^{\sigma+\omega}$ , 显著大于  $\delta^{\sigma+\omega}$ 。对管族  $\tilde{\mathbb{T}}[W]$  作同样论证, 可知对每个  $W \in \mathcal{W}$ , 并集  $\bigcup_{\tilde{\mathbb{T}}[W]} \tilde{T}$  具有很大体积。撤销上一步中描述并在图 3 中示意的重标度, 得到尺度  $\delta \ll \tau \ll \delta/\rho \geq$  (这里  $\tau$  取决于  $t$  以及  $W$  相对  $\square$  的方向), 使得对  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  中一个典型点  $x$ , 球  $B_{\tau} = B(x, \tau)$  与  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  的交很大, 即

$$\left| B_{\tau} \cap \left( \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right) \right| \gtrsim C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})^{\sigma/2} (\delta/\tau)^{\sigma+\omega} |B_{\tau}|. \quad (1.12)$$

当  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \geq \delta^{-2\alpha/\sigma}$  时, 这正是 (1.7); 这也就是这里所说的  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \gg 1$  的定量含义。

再取一族本质不同的  $\tau$ -管  $\mathbb{T}_\tau$  覆盖  $\mathbb{T}$ , 并假设每根  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$  包含约  $(\#\mathbb{T})/(\#\mathbb{T}_\tau)$  根  $\mathbb{T}$  中的管。容易算得  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_\tau) \lesssim 1$  (事实上这是从  $\mathbb{T}$  继承的), 并且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau) \approx (\#\mathbb{T}_\tau)|T_\tau|$ ; 后一数量至少为 1, 因为  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \lesssim 1$ , 所以覆盖  $\mathbb{T}$  至少需要  $|T_\tau|^{-1}$  根本质不同的  $\tau$ -管。对  $\mathbb{T}_\tau$  应用估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ , 得到

$$\left| \bigcup_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} T_\tau \right| \gtrsim \tau^\omega \left( (\#\mathbb{T}_\tau)|T_\tau|^2 \right)^{\sigma/2} \gtrsim \tau^{\omega+\sigma}.$$

最后一个不等式使用了  $\#\mathbb{T}_\tau \gtrsim |T_\tau|^{-1}$ , 该估计由  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \lesssim 1$  与  $\#\mathbb{T} \sim \delta^{-2}$  推出。把这一尺度  $\tau$  的估计与半径  $\tau$  球内的估计 (1.12) 配合, 得到 (1.5):

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim \left| \bigcup_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} T_\tau \right| \cdot C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})^{\sigma/2} \left( \frac{\delta}{\tau} \right)^{\sigma+\omega} \\ &\gtrsim \delta^{\omega+\sigma} C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})^{\sigma/2}. \end{aligned}$$

情形 3:  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \gg 1$ , 且每个  $W \in \mathcal{W}$  的厚度  $\approx \delta$ 。此时可用更大的棱柱替换  $\mathcal{P}$  中的颗粒——这些较大的棱柱就是来自  $\mathcal{W}$  的重标度凸集。该过程可能改变  $\rho$ , 也改变颗粒的尺寸。以新的  $\rho$  和更大的颗粒重复上述论证。如果每次迭代都落入情形 3, 颗粒会越来越宽。暂设经过足够多次迭代后,  $\rho$  与  $c$  的大小都  $\approx 1$ , 则  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  被组织成若干  $\delta \times 1 \times 1$  薄板的并。此时, 一个与 Córdoba 在平面中证明挂谷极大函数猜想相似的直接几何论证给出  $|\bigcup_{\mathbb{T}} T| \approx 1$ 。若  $c \ll 1$ , 则另一种 Córdoba 型几何论证结合  $\mu \gg 1$  的假设 (若该假设不成立, 我们已经完成证明) 可增大  $c$ , 然后继续迭代。

### 简化假设的说明。

下面简要说明简化假设 A–C。首先, 若简化假设 A 不成立, 则可直接利用黏性挂谷定理证明 (1.5); 详见第 10 节。一般而言, 简化假设 B 未必成立; 但若它不成立, 则或者直接证明 (1.5), 或者可以在  $\delta$  与  $\rho$  之间找到一个使该假设成立的中间尺度。这样会给论证增加若干步骤和技术复杂性, 但不会从根本上改变证明的思想。

若简化假设 C 不成立, 则可以使用一个直接的 Córdoba 型几何论证证明: 对一个典型棱柱  $P_0 \in \mathcal{P}$ , 所有与  $P_0$  相交的  $P \in \mathcal{P}$  的并几乎填满  $P_0$  的某个加厚邻域。这又意味着, 对一个典型管  $T_0 \in \mathbb{T}$ , 并集  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  几乎填满  $T_0$  的某个加厚邻域。随后可按上述情形 2 的方式论证, 得到 (1.6)。

下表汇总第 1.5 节论证中出现的一些几何对象。

| 对象                   | 基数                             | 尺寸                              | 包围盒                                               | 并集大小                             | 目标并集大小                                  | 重数                                                                              | 目标重数                                      |
|----------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\mathbb{T}$         | $\delta^{-2}$                  | $\delta \times \delta \times 1$ | $1 \times 1 \times 1$                             | $\gtrsim \delta^{\sigma+\omega}$ | $\gtrsim \delta^{\sigma+\omega-\alpha}$ | $\lesssim \delta^{-\sigma-\omega}$                                              | $\lesssim \delta^{-\sigma-\omega+\alpha}$ |
| $\mathbb{T}[T_\rho]$ | $\delta^\nu(\delta/\rho)^{-2}$ | $\delta \times \delta \times 1$ | $\rho \times \rho \times 1$                       |                                  |                                         | $\lesssim \delta^{\nu\sigma} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{-\sigma-\omega}$ |                                           |
| $\mathcal{P}$        |                                | $\delta \times c\rho \times c$  | $\frac{\delta}{\rho} \times c \times c$<br>(切向情形) |                                  |                                         | $\mu_{\text{coarse}}$                                                           | $\lesssim \rho^{-\sigma-\omega}$          |
| $\tilde{\mathbb{T}}$ |                                | $\rho \times \rho \times 1$     | $1 \times 1 \times 1$                             |                                  |                                         | $\mu_{\text{coarse}}$                                                           | $\lesssim \rho^{-\sigma-\omega}$          |

## 1.6 管倍增与 Keleti 线段延拓猜想

本节讨论定理 1.9 的进一步推论。首先介绍管倍增猜想（例如见 [10, Conjecture 15.19]）。以下若  $T$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一根  $\delta$ -管，则  $\tilde{T}$  表示  $T$  的 2 倍膨胀。Besicovitch 构造了  $\mathbb{R}^2$  中一族约  $\delta^{-1}$  根管组成的  $\mathbb{T}$ ，满足

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} \tilde{T} \right| \gtrsim \frac{\log(1/\delta)}{\log \log(1/\delta)} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right|. \quad (1.13)$$

Fefferman 在 [8] 中改造了这一构造，用以证明当  $p \neq 2$  时球乘子在  $L^p$  上无界。

管倍增猜想断言，除去次多项式因子，不等式 (1.13) 已经是最优的。一种表述如下。

**猜想 1.11.** 设  $n \geq 2$  且  $\varepsilon > 0$ 。则当  $\delta > 0$  充分小时，下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一族  $\delta$ -管。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} \tilde{T} \right| \leq \delta^{-\varepsilon} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right|. \quad (1.14)$$

猜想 1.11 在二维中已知成立，而在三维及更高维中仍未解决。作为定理 1.9 的推论，我们解决  $\mathbb{R}^3$  中的猜想 1.11。

**定理 1.12.** 管倍增猜想在  $\mathbb{R}^3$  中成立。

第 12 节将讨论定理 1.12 的证明。管倍增猜想与 Keleti 的线段延拓猜想 [22] 密切相关。在下文的陈述中，若  $\ell$  是一条线段（按定义，线段具有正长度），则  $\tilde{\ell}$  表示包含  $\ell$  的整条直线。

**猜想 1.13.** 设  $L$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一族线段。则

$$\dim \left( \bigcup_{\ell \in L} \tilde{\ell} \right) = \dim \left( \bigcup_{\ell \in L} \ell \right).$$

Keleti 与 Máthé 在 [23] 中证明， $\mathbb{R}^n$  中的挂谷集猜想蕴含  $\mathbb{R}^n$  中的猜想 1.13。因此，定理 1.1 有下述推论。

**定理 1.14.** 猜想 1.13 在  $\mathbb{R}^3$  中成立。

## 1.7 致谢

作者感谢 Ciprian Demeter、Larry Guth、Nets Katz、Izabella Laba、Tuomas Orponen、Keith Rogers、Pablo Shmerkin 和 Terence Tao 对本文早期版本提出的评论、建议与勘误。Hong Wang 感谢 Guido de Philippis 所进行的有益讨论。Hong Wang 获 NSF CAREER DMS-2238818 和 NSF DMS-2055544 资助。Joshua Zahl 获 NSERC Discovery Grant 和 NSERC Alliance Grant 资助。

## 2 证明梗概

本节旨在简要说明命题 1.6 与 1.7 证明中的主要步骤。为了使这一证明梗概更易读，我们将略去许多技术细节，并作若干“善意的简化”。例如，我们会暂且把每个着色  $Y(T) \subset T$  都视为平凡着色  $Y(T) = T$ ；同时也假定每个点  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T$  总是包含在  $\mathbb{T}$  中相同数量的管内，对其他管族、长方棱柱族等也作类似假设。与第 1.5 节一样，我们忽略  $\delta^\varepsilon$  或  $\delta^{-\varepsilon}$  型因子，并非正式地写  $A \lesssim B$  表示  $A \leq C\delta^{-\varepsilon}B$ ，其中常数  $C$  与  $\delta$  无关，而小参数  $\varepsilon > 0$  在本梗概中不再追踪（第 3 节将严格定义关系  $\lesssim$ ，后续正式证明都使用该定义）。实际证明中存在大量参数（ $\varepsilon$  只是其中之一），准确处理这些参数之间的相互依赖是本文的主要技术难点之一；这一问题在证明梗概中完全略去。

最后，为方便说明，本节会引入若干后文定义和定理的“非正式版本”。这些版本有意保持不精确，有时甚至并非字面意义上正确；后文会由严格的正式陈述取代。带着这些约定，下面开始证明梗概。

### 2.1 命题 1.6：断言 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{E}$ 等价

首先证明命题 1.6。为此，我们将迭代使用下述引理：

**引理 6.4（非正式版本）** . 设  $0 < \omega < \omega'$ ，并假设  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  与  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  均成立。则  $\mathcal{E}(\sigma, \omega' - \alpha)$  成立，其中  $\alpha > 0$  只依赖于  $\omega$  与  $\omega' - \omega$ 。

为证明命题 1.6，固定  $\omega$  和  $\sigma$ ，并假设  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立。由于  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  的体积至少等于一根管的体积，所以  $\mathcal{E}(\sigma, 2)$  显然成立。随后多次迭代引理 6.4，可得对每个  $\varepsilon > 0$ ， $\mathcal{E}(\sigma, \omega + \varepsilon)$  成立，从而  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。

引理 6.4 的思想如下。给定一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$ ，目标是证明

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrsim \delta^{\omega' - \alpha} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} \ell (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \quad (2.1)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ， $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。为简化讨论，我们暂且假定任意管族总满足  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \lesssim 1$ ；去掉这一假设会引入若干额外困难，这里不展开。

若  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \lesssim 1$ ，则  $\mathbb{T}$  满足  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设，直接应用  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  即得 (2.1)。下面设  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) = m \gg 1$ 。这意味着存在一个凸集  $W$ ，其中至少包含  $m|W|\delta^{-2}$  根  $\mathbb{T}$  中的管。由于  $W$  至少包含一根

单位长的管，它的直径必定  $\geq 1$ ；又因  $\mathbb{T}$  中各管都位于单位球内，不妨假设  $\text{diam} W \sim 1$ 。因此，可把  $W$  视为一个尺寸为  $a \times b \times 1$  的长方棱柱，其中  $\delta \leq a \leq b \leq 1$ 。最有趣的情形是  $a$  与  $b$  同数量级，也就是说， $W$  可与某根  $\rho$ -管比较，其中  $\delta \leq \rho \leq 1$ 。

受上述讨论启发，考虑以下情形： $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) = m \gg 1$ ；存在尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$ ；并且存在一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ ，其中每根管约包含  $m(\rho/\delta)^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管。容易验证  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) = O(1)$ ：若某凸集  $W$  含有  $N$  根  $\mathbb{T}_\rho$  中的管，则它约含有  $Nm(\rho/\delta)^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管；另一方面， $W$  中至多可容纳  $m|W|/\delta^2$  根  $\mathbb{T}$  中的管，见图 4。注意，这一情形在某种意义上与第 1.1 节及图 1 右图中的困难情形恰好相反：那里有很多（远多于  $\rho^{-2}$ ）根  $\rho$ -管，而每根  $\rho$ -管内只含很少（远少于  $(\rho/\delta)^2$ ）根  $\delta$ -管。

上面已经说明  $\mathbb{T}_\rho$  满足  $D(\sigma, \omega)$  的假设，因此

$$\left| \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} T_\rho \right| \gtrsim \rho^\omega (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho| \left( (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \quad (2.2)$$

(这里  $|T_\rho| \sim \rho^2$  表示一根  $\rho$ -管的体积。) 另一方面，对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ， $T_\rho$  内经重标度后的  $\delta$ -管以约为  $m$  的误差满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理，即  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\rho}) \lesssim m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ 。

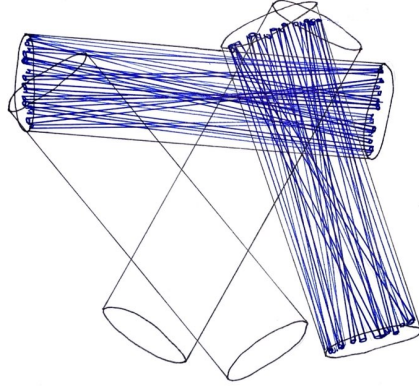


图 4:  $\mathbb{T}_\rho$  (黑色) 与  $\mathbb{T}$  (蓝色)。为使图形清楚，只画出了两根  $\rho$ -管内部的  $\mathbb{T}$  中的管。注意， $\rho$ -管相对稀疏，而  $\mathbb{T}[T_\rho]$  中的管却密集排列。该情形与图 1 左图类似，不同之处在于每根  $\rho$ -管内部经重标度后的  $\delta$ -管非常稠密，因此  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\rho})$  很大。

对断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  应用估计 (1.3)，得到

$$\left| \bigcup_{T^{T_\rho} \in \mathbb{T}^{T_\rho}} T^{T_\rho} \right| \gtrsim \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{\omega'} m^{-1} (\#\mathbb{T}[T_\rho]) |T^{T_\rho}| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}[T_\rho]) |T^{T_\rho}|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \quad (2.3)$$

不等式 (2.2) 表明，覆盖  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  大约需要  $\rho^{-3+\omega} (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho| \left( (\#\mathbb{T}_\rho) |T_\rho|^{1/2} \right)^{-\sigma}$  个不同的  $\rho$ -球；而 (2.3) 右侧给出了  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  在这一球族中一个典型  $\rho$ -球内的密度下界。将两者结合，并注意  $(\#\mathbb{T}_\rho)(\#\mathbb{T}[T_\rho]) = \#\mathbb{T}$  以及  $|T_\rho| |T^{T_\rho}| = |T|$ ，得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrsim \rho^{\omega-\omega'} \delta^{\omega'} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \quad (2.4)$$

若存在与 0 有正距离的  $\zeta > 0$  使  $\rho < \delta^\zeta$ , 则 (2.4) 恰好给出 (2.1), 其中  $\alpha = \zeta(\omega' - \omega)$ 。

至此, 引理 6.4 以及命题 1.6 的证明基本完成; 唯一例外是, 我们在论证中假定存在一族满足下列性质的  $\rho$ -管:

- (a)  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) = O(1)$ ;
- (b) 每根  $\rho$ -管  $T_\rho$  含有约  $m|T_\rho|/|T|$  根  $\mathbb{T}$  中的管, 其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ;
- (c)  $\mathbb{T}_\rho$  中的集合确实是管, 即尺寸为  $\rho \times \rho \times 1$ ;
- (d)  $\rho \ll 1$ , 即  $\rho = \delta^\zeta$ , 其中某个  $\zeta > 0$  与 0 有正距离。

遗憾的是, 对任意给定的  $\delta$ -管族  $\mathbb{T}$ , 并不总能找到满足上述性质的  $\rho$ -管族。比如, 设  $\mathbb{T}$  是基数为  $\delta^{-5/2}$  的  $\delta$ -管排列, 令  $s = \delta^{5/8}$ , 并让单位球  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  中约  $s^{-4}$  根本质不同的  $s$ -管各自包含  $\mathbb{T}$  中的一根  $\delta$ -管。这类例子称为良好间隔情形 (well-spaced case)。对此类  $\mathbb{T}$ , 不存在满足 (a)–(d) 的尺度  $\rho$ 。不过, 这一排列满足略有不同的结论: 存在尺度  $\delta \leq \tau \leq \rho$ , 以及  $\tau$ -管族  $\mathbb{T}_\tau$  与  $\rho$ -管族  $\mathbb{T}_\rho$ , 使得

- (i)  $\mathbb{T}$  的基数约为  $m|T|^{-1}$ , 其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ;
- (ii)  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim (\#\mathbb{T}_\rho)|T_\rho|$ ;
- (iii) 对每根  $\rho$ -管  $T_\rho$ , 有  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}) = O(1)$ , 且  $\#\mathbb{T}_\tau^{T_\rho} \sim |T_\tau^{T_\rho}|^{-1} = (\rho/\tau)^2$ ;
- (iv) 对每根  $\tau$ -管  $T_\tau$ , 有  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\tau}) \lesssim (\#\mathbb{T}[T_\tau])|T_\tau|$ ;
- (v)  $\tau \ll \rho$ , 即  $\tau = \delta^\zeta \rho$ , 其中某个  $\zeta > 0$  与 0 有正距离。

对上述良好间隔例子, 有  $m = \delta^{-1/2}$ 、 $\tau = \delta$ 、 $\rho = \delta^{1/4}$ 、 $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}$ , 而  $\mathbb{T}_\rho$  是一族极大的、包含  $\rho^{-4}$  根本质不同  $\rho$ -管的集合。

上述论证可以适应该情形。由 (ii),  $\rho$ -管满足断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的假设, 因此

$$\left| \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} T_\rho \right| \gtrsim \rho^{\omega'} (\#\mathbb{T}_\rho)^{\sigma/2} |T_\rho|^\sigma. \quad (2.5)$$

注意, (2.5) 右侧正是断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  中估计 (1.3) 的形式 (忽略乘法常数  $\kappa$ ), 此时  $m = (\#\mathbb{T}_\rho)|T_\rho|$  且  $\ell = O(1)$ 。

由 (iii), 每根  $\rho$ -管内部的  $\tau$ -管满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设, 因此对每根  $T_\rho$  有

$$\left| \bigcup_{T_\tau^{T_\rho} \in \mathbb{T}_\tau^{T_\rho}} T_\tau^{T_\rho} \right| \gtrsim \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^\omega |T_\tau^{T_\rho}|^{\sigma/2}. \quad (2.6)$$

其右侧正是断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中估计 (1.2) 的形式, 此时  $\#\mathbb{T}_\tau^{T_\rho} = |T_\tau^{T_\rho}|^{-1}$ 。

最后, 由 (iv), 每根  $\tau$ -管内部的  $\delta$ -管满足断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  的假设, 因此对每根  $T_\tau$  有

$$\left| \bigcup_{T^{T_\tau} \in \mathbb{T}^{T_\tau}} T^{T_\tau} \right| \gtrsim \left( \frac{\delta}{\tau} \right)^{\omega'} (\#\mathbb{T}[T_\tau])^{\sigma/2} |T^{T_\tau}|^\sigma. \quad (2.7)$$

若  $\tau$ -管在  $\rho$ -管之间均匀分布, 且  $\delta$ -管在  $\tau$ -管之间也均匀分布, 则可假设对每根  $T_\tau$  和每根  $T_\rho$ , 有  $(\#\mathbb{T}^{T_\tau})(\#\mathbb{T}_\tau^{T_\rho})(\#\mathbb{T}_\rho) = \#\mathbb{T}$ 。于是合并 (2.5)、(2.6) 与 (2.7), 得到 (2.4) 的类似式:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| &\gtrsim \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^{\omega - \omega'} \delta^{\omega'} (\#\mathbb{T})^{\sigma/2} |T|^\sigma \\ &= \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^{\omega - \omega'} \delta^{\omega'} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中第二个等号使用了 (i)。由 (v),  $\tau/\rho < \delta^\zeta$ , 从而得到目标估计 (2.1), 其中  $\alpha = \zeta(\omega' - \omega)$ 。

为证明引理 6.4 (进而证明命题 1.6), 我们证明任意  $\delta$ -管排列至少满足下列一种情形:

- (A) 存在满足上述 (a)–(d) 的  $\rho$ -管族;
- (B) 存在满足上述 (i)–(v) 的  $\tau$ -管族与  $\rho$ -管族;
- (C)  $\mathbb{T}$  中的管可以高效地装入尺寸为  $s \times t \times 1$ 、且  $s \ll t$  的长方棱柱中;
- (D)  $\mathbb{T}$  中的管在每个尺度都满足 *Frostman* 凸 *Wolff* 公理 (见定义 6.1)。

为建立上述多歧性结论, 第 4 节发展一套关于  $\mathbb{R}^n$  中凸集族 “因子分解” 的一般理论。给定一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$ , 该理论可找出一族凸集  $\mathcal{W}$ , 使得以  $\mathcal{W}$  代替  $\mathbb{T}_\rho$  后, 满足上述 (a)、(b) 的类似条件。若这些凸集的尺寸为  $s \times t \times 1$  且  $s \ll t$ , 则得到情形 (C); 若  $s \sim t$ , 则  $\mathcal{W}$  中的凸集几乎就是管。我们在若干精心选择的尺度上反复应用此类论证, 从而证明 (A)–(D) 至少有一种成立。

到目前为止的论证已经证明, 当 (A) 或 (B) 成立时, 目标不等式 (2.1) 成立。第 5 节将通过仔细的重标度论证证明情形 (C) 下该不等式也成立。最后, 情形 (D) 恰好允许直接应用黏性挂谷定理 (按 [26] 的推广形式), 从而立即得到  $\mathbb{T}$  满足 (2.1)。

至此, 命题 1.6 的证明梗概结束。下面转向命题 1.7。

## 2.2 双尺度颗粒分解

在第 7 节和第 8 节中, 我们研究这样一类  $\delta$ -管排列的结构: 它们使断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中的估计 (1.2) 几乎取等, 即既满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设, 又满足

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \lesssim \delta^\omega (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}.$$

暂且假定这样的  $\mathbb{T}$  确实存在; 在第 2 节末尾将得到矛盾。经过仔细处理, 即使把  $\delta^\omega$  换成  $\delta^{\omega-\nu}$ , 其中  $\nu > 0$  很小, 这一矛盾仍然成立。

Guth 在 [9] 中证明, 在温和的“宽广性”假设下,  $\mathbb{R}^3$  中任意  $\delta$ -管并集  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  都可以写成尺寸为  $\delta \times c \times c$  的长方棱柱的不交并, 其中  $c \geq ((\#\mathbb{T})|T|^{1/2})^{-1}$ ; 见图 2 左图。当  $\#\mathbb{T}$  显著小于  $|T|^{-1}$  时, 这个  $c$  的下界很有意义 (回顾  $|T|$  的数量级约为  $\delta^2$ )。在另一极端, 如果  $\#\mathbb{T}$  的大小约为  $|T|^{-1/2}$  (在上述宽广性假设下, 这是  $\mathbb{T}$  所允许的最小基数), 则颗粒的尺寸约为  $\delta \times 1 \times 1$ 。值得指出的是, Guth 的方法还给出更强的下界  $c \geq \mu((\#\mathbb{T})|T|^{1/2})^{-1}$ , 其中  $\mu$  是通过典型点的  $\mathbb{T}$  中管的数量, 但本文不需要这一更强形式。

首先证明存在尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$  和一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 使  $\mathbb{T}_\rho$  以及所有重标度管族  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  (见 (1.8)) 都满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设。此外, 每个重标度管族  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  都满足应用 Guth 结果某个变体所需的宽广性假设。因此,  $\bigcup_{\mathbb{T}[T_\rho]} T^{T_\rho}$  可写成尺寸为  $\delta/\rho \times c \times c$  的长方棱柱的不交并, 其中  $c \geq ((\#\mathbb{T}[T_\rho])|T^{T_\rho}|^{1/2})^{-1}$ 。注意, 随着  $\#\mathbb{T}[T_\rho]$  变小, 颗粒会变大; 这一数值关系在后文中十分重要。撤销重标度后,  $\bigcup_{\mathbb{T}[T_\rho]} T$  被分割为彼此不交的  $\delta \times \rho c \times c$  长方棱柱; 称这些棱柱为颗粒 (见图 2 右图), 并把这族颗粒记为  $\mathcal{G}_{T_\rho}$ 。令  $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathbb{T}_\rho} \mathcal{G}_{T_\rho}$ 。下文称  $\mathcal{G}$  为  $\mathbb{T}$  的“双尺度 Guth 颗粒分解”。

回顾第 1.5 节的证明概览中曾采用简化假设 D。下面说明证明该假设所需的技术步骤。第 7 节的主要目标是定义三个“操作” (Moves), 下文先作简要介绍。完成这些操作后, 将得到新的尺度  $\rho$ , 满足  $\delta \ll \rho \ll 1$ ; 一族覆盖  $\mathbb{T}$  的新  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ ; 以及一族新的颗粒  $\mathcal{G}$ , 满足:

- (i) 每个颗粒的尺寸为  $\delta \times \rho c \times c$ , 且  $c \geq ((\#\mathbb{T}[T_\rho])|T^{T_\rho}|^{1/2})^{-1}$ ;
- (ii) 每个颗粒  $G \in \mathcal{G}$  唯一地对应一根  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 且  $G \subset T_\rho$ ; 在误差  $\rho$  的意义下,  $G$  与  $T_\rho$  指向同一方向;
- (iii) 对应同一根  $\rho$ -管的不同颗粒彼此不交;
- (iv) 对每根  $\rho$ -管  $T_\rho$ , 有  $\bigsqcup G = \bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} T$ , 其中左侧不交并遍历所有与  $T_\rho$  对应的颗粒;
- (v) 对应不同  $\rho$ -管的颗粒可以相交, 但相交必须是切向的, 即相交颗粒的切平面在误差  $\delta/(\rho c)$  内一致。

性质 (v) 意味着可以用尺寸为  $\frac{\delta}{\rho} \times c \times c$  的盒覆盖  $\mathbb{R}^3$ , 使每个颗粒包含在  $O(1)$  个盒中, 而两颗粒只有在包含于同一盒时才可能相交。把一个盒重标度为单位立方体后, 盒内颗粒变成  $\rho \times \rho \times 1$  的长方棱柱, 即  $\rho$ -管 (见图 2)。引入如下记号: 若  $\square$  是一个  $\frac{\delta}{\rho} \times c \times c$  盒, 则  $\mathcal{G}^\square$  表示把  $\square$  内  $\mathcal{G}$  中的颗粒重标度后得到的  $\rho$ -管族。于是还有最后性质:

- (vi) 对每个盒  $\square$ ,  $\mathcal{G}^\square$  中的  $\rho$ -管满足  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的假设, 且  $C_{KT-CW}(\mathcal{G}^\square) \lesssim 1$ 。

下面说明如何通过三个操作得到满足 (i)–(vi) 的尺度  $\rho$ 、管族  $\mathbb{T}_\rho$  和颗粒族  $\mathcal{G}$ 。起初令  $\mathcal{G}$  为上面定义的双尺度 Guth 颗粒分解。此时 (i)–(iv) 成立, 并且 (ii)–(iv) 在整个过程中始终保持。

如果在过程中的任何时刻 (v) 不成立, 则用反证法处理。借助一个与 Córdoba 在平面中证明挂谷极大函数猜想相似的  $L^2$  论证, 可以证明存在尺度  $\tilde{\delta} \gg \delta$ , 使典型颗粒  $G$  的“发刷” (即所有

满足  $G' \cap G \neq \emptyset$  的  $G' \in \mathcal{G}$  的并) 几乎填满  $G$  的  $\tilde{\delta}$ -邻域。暂且假装发刷完全填满该邻域。则对每根  $\delta$ -管  $T \in \mathbb{T}$ , 对应的  $\tilde{\delta}$ -管  $\tilde{T} = N_{\tilde{\delta}}(T)$  满足  $\tilde{T} \subset \bigcup_{T' \in \mathbb{T}} T'$ 。因此, 可用一族更粗的  $\tilde{\delta}$ -管  $\tilde{\mathbb{T}}$  替换原来的  $\delta$ -管族, 而且  $\bigcup_{\mathbb{T}} T = \bigcup_{\tilde{\mathbb{T}}} \tilde{T}$ 。新的粗管族以有利的  $C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}})$ 、 $C_{F-SW}(\tilde{\mathbb{T}})$  参数满足  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的假设, 从而可以对  $\tilde{\mathbb{T}}$  应用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ , 得到一个优于断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  所给估计的  $|\bigcup_{\mathbb{T}} T|$  下界。这与  $\mathbb{T}$  使  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的体积估计取等的假设矛盾。

下面介绍上述三个操作。为了叙述方便, 我们按照与第 8 节中定义顺序相反的次序介绍。

操作 #3 处理性质 (vi) 失效的情形 (回顾  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  对  $\mathbb{T}$  几乎取等)。通过一个  $L^2$  论证, 证明每个颗粒  $G \in \mathcal{G}$  的发刷几乎填满一个更宽的颗粒  $\tilde{G} \supset G$ ; 这些更宽的颗粒保持相同“长度” $c$ , 但  $\rho$  显著增大。图 14 给出该步骤的示意。

应用操作 #3 后,  $\rho$  可能变得过大, 以至于  $\rho \ll 1$  不再成立。操作 #2 处理这一问题。它利用一个  $L^2$  论证找出一族新颗粒, 使其新长度  $c$  显著增大, 并同时得到新的  $\rho$ , 满足  $\delta \ll \rho \ll 1$ 。图 10 给出该步骤的示意。

最后, 每当  $\rho$  改变, 数量  $(\#\mathbb{T}[T_\rho])|T_\rho|^{1/2})^{-1}$  也随之改变。因此, 执行操作 #2 或 #3 后, 可能出现  $(\#\mathbb{T}[T_\rho])|T_\rho|^{1/2})^{-1}$  远大于  $c$  的情形, 从而性质 (i) 失效。操作 #1 用于处理这一情形: 丢弃当前  $\mathcal{G}$ , 改用前述  $\mathbb{T}$  的双尺度 Guth 颗粒分解 (操作 #2 与 #3 都保留调用该分解所需的宽广性条件)。这样得到的新颗粒分解具有相同的  $\rho$ , 而长度  $c$  显著增大。

三个操作都可以保证  $\mathcal{G}$  满足上述 (i)–(vi) 中的若干性质, 但执行其中某个操作也可能破坏其他性质。不过, 每个操作要么显著增大颗粒长度  $c$ , 要么保持长度不变而显著增大  $\rho$ 。由于  $c$  与  $\rho$  都以 1 为上界, 经过有界次数后, 操作 #1、#2、#3 的迭代必定停止。最终得到的颗粒分解满足 (i)–(vi)。

## 2.3 精细尺度归纳

第 9 节使用第 7 节的双尺度颗粒分解, 在两个不同尺度上应用断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ : 一次应用于每根  $\rho$ -管内部经重标度后的  $\delta$ -管, 另一次应用于每个盒  $\square$  内由重标度颗粒产生的  $\rho$ -管, 即每个排列  $\mathcal{G}^\square$ 。这是命题 1.7 证明中的关键步骤; 此前整个证明结构都经过精心安排, 以便能够对  $\mathcal{G}^\square$  应用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ 。

论证如下。设  $\mathbb{T}$  是一族使断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中估计取等的  $\delta$ -管, 并令  $\mathbb{T}_\rho$  与  $\mathcal{G}$  为上一节所述的颗粒分解。作一个小的简化, 假设存在数  $\mu$ , 使每个点  $x \in \bigcup_{\mathbb{T}} T$  都包含在约  $\mu$  根  $\mathbb{T}$  中的管内。于是  $|\bigcup_{\mathbb{T}} T| \sim \mu^{-1}(\#\mathbb{T})|T|$ , 目标是给出  $\mu$  的上界。再假设存在  $\mu_{\text{fine}}$ , 使对每根  $T_\rho$ , 每个  $x \in \bigcup_{\mathbb{T}[T_\rho]} T$  都包含在约  $\mu_{\text{fine}}$  根  $\mathbb{T}[T_\rho]$  中的管内。最后, 假设存在  $\mu_{\text{coarse}}$ , 使每个点  $x \in \bigcup_{\mathbb{T}} T = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$  都包含在约  $\mu_{\text{coarse}}$  个  $\mathcal{G}$  中的颗粒内。由第 2.2 节的 (ii)、(iv), 有  $\mu \lesssim \mu_{\text{fine}}\mu_{\text{coarse}}$ , 因此只需估计后两者。

由于每个重标度管族  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  都满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设, 有

$$\mu_{\text{fine}} \lesssim (\delta/\rho)^{-\omega} \left( \#\mathbb{T}[T_\rho] |T_\rho|^{1/2} \right)^\sigma, \quad (2.9)$$

其中  $\#\mathbb{T}[T_\rho]$  的大小约为  $(\#\mathbb{T})/(\#\mathbb{T}_\rho)$ , 且  $|T_\rho| = |T|/|\rho|$ 。

下面估计  $\mu_{\text{coarse}}$ 。对每个  $\rho$ -管族  $\mathcal{G}^\square$  应用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ 。(必须使用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  而不是  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ , 因为

$C_{F-SW}(\mathcal{G}^\square)$  可能很大, 这需要另行处理; 这里略去该技术问题。) 得到

$$\mu_{\text{coarse}} \lesssim \rho^{-\omega} ((\#\mathcal{G}^\square)|T_\rho|^{1/2})^\sigma \lesssim \rho^{-\omega}|T_\rho|^{-\sigma/2}. \quad (2.10)$$

第二个不等式来自  $C_{KT-CW}(\mathcal{G}^\square) \lesssim 1$ , 从而  $\#\mathcal{G}^\square \lesssim |T_\rho|^{-1}$ 。合并 (2.9) 与 (2.10) 得

$$\mu \lesssim \left[ \delta^{-\omega} ((\#\mathbb{T})|T|^{1/2})^\sigma \right] \left[ |T_\rho|(\#\mathbb{T}_\rho) \right]^{-\sigma}. \quad (2.11)$$

第一个方括号中的量正是直接对  $\mathbb{T}$  应用断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  所得到的估计。因此, 当且仅当  $\#\mathbb{T}_\rho \gg |T_\rho|^{-1}$  时, (2.11) 才给出真正更强的估计。由于假设  $\mathbb{T}$  使  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的估计取等, 因此必有  $\#\mathbb{T}_\rho \lesssim |T_\rho|^{-1}$ 。

上述论证为了突出主要思想而进行了简化。实际上需要证明一个略强的结论: 不是只得到  $\#\mathbb{T}_\rho \lesssim |T_\rho|^{-1}$ , 而是要证明  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim 1$ 。这一更困难的估计如下获得。反设  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \gg 1$ , 则可以找到凸集  $W$ , 使  $\mathbb{T}_\rho[W]$  的基数远大于  $|W|/|T_\rho|$  (实际上能找到许多这样的  $W$ , 见命题 4.6)。上面的论证对应于  $W$  与单位球可比较的特殊情形。一般情形会引入技术困难, 但借助第 4 节和第 5 节为证明命题 1.6 已经建立的方法 (见第 2.1 节末尾的讨论), 不需要新的核心思想。

## 2.4 多尺度结构、Nikishin–Stein–Pisier 因子分解与黏性挂谷

总结前面的结论: 若  $\mathbb{T}$  是一族使  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  估计取等的  $\delta$ -管, 则存在尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$  和一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim 1$ ; 并且  $\mathbb{T}_\rho$  以及每个重标度管族  $\mathbb{T}[T_\rho]$  都满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的假设, 同时  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  的估计对所有这些管排列也都取等。

因此, 可以对  $\mathbb{T}_\rho$  以及每个重标度管族  $\mathbb{T}[T_\rho]$  递归应用同样的论证。经过适当删减后, 得到一系列彼此接近的尺度  $\delta = \rho_N < \rho_{N-1} < \cdots < \rho_0 = 1$ , 以及覆盖  $\mathbb{T}$  的管族  $\{\mathbb{T}_{\rho_i}\}_{i=1}^N$ , 并且对每个  $i$  都有  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\rho_i}) \lesssim 1$ 。

我们希望应用黏性挂谷定理, 推出  $|\bigcup_{\mathbb{T}} T|$  几乎和  $\sum_{\mathbb{T}} |T|$  一样大。事实上, 上述情形几乎正好符合 [26, Theorem 1.8] 中推广后的黏性挂谷定理设定: 若  $\#\mathbb{T} \approx \delta^{-2}$ , 则  $\mathbb{T}$  将满足该定理全部假设。由  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \lesssim 1$  可知  $\#\mathbb{T} \lesssim \delta^{-2}$ , 但不幸的是,  $\#\mathbb{T}$  可能远小于  $\delta^{-2}$ 。

第 10 节使用 Nikishin–Stein–Pisier 因子分解论证证明: 若  $\#\mathbb{T} \ll \delta^{-2}$ , 则可以构造新管族  $\hat{\mathbb{T}}$ , 它由约  $\delta^{-2}(\#\mathbb{T})^{-1}$  个  $\mathbb{T}$  的随机平移和旋转副本的并组成。新管族  $\hat{\mathbb{T}}$  的基数约为  $\delta^{-2}$ 。与原管族  $\mathbb{T}$  一样,  $\hat{\mathbb{T}}$  具有一列覆盖  $\{\hat{\mathbb{T}}_{\rho_i}\}_{i=1}^N$ , 并满足每个  $C_{KT-CW}(\hat{\mathbb{T}}_{\rho_i}) \lesssim 1$ 。因此可对  $\hat{\mathbb{T}}$  应用黏性挂谷定理, 得到  $|\bigcup_{T \in \hat{\mathbb{T}}} T| \gtrsim 1$ 。由于  $\bigcup_{\mathbb{T}} T$  的体积在平移和旋转下不变 (这是 Nikishin–Stein–Pisier 因子分解的关键), 得到

$$|\bigcup_{T \in \mathbb{T}} T| \gtrsim (\#\mathbb{T})|T|. \quad (2.12)$$

但若  $\sigma, \omega > 0$ , 则 (2.12) 与  $\mathbb{T}$  使  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  估计取等的假设矛盾。因此, 当  $\sigma, \omega > 0$  时, 不存在任何满足断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  假设且使其估计取等的管族  $\mathbb{T}$ 。该结论的定量版本正是命题 1.7。

### 3 记号

在后续论证中,  $\delta > 0$  表示一个很小的正数。不同于第 1 节和第 2 节中的非正式记号, 若对任意  $\varepsilon > 0$  都存在  $K_\varepsilon > 0$ , 使  $A(\delta) \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} B(\delta)$ , 则记  $A(\delta) \lesssim_\delta B(\delta)$ 。若上下文已经明确  $\delta$  的作用, 通常简写为  $A \lesssim B$ 。例如, 若  $K$  是与  $\delta$  无关的常数, 则  $\log(1/\delta)^K \lesssim 1$ ; 同样,  $e^{\sqrt{\log 1/\delta}} \lesssim 1$ 。

在本文某些章节中, 为简化记号, 会固定若干变量 (例如定义 1.5 中的  $\sigma$  和  $\omega$ )。在这种情况下, 我们会明确说明哪些变量被固定, 并在该节中用粗体表示这些固定变量, 以及仅依赖于固定变量的量。例如, 可以定义  $\beta = \sigma\omega/100$ 。

#### 3.1 凸集与着色

引言中把  $\delta$ -管定义为单位线段的  $\delta$ -邻域。后续论证还会频繁使用其他类型的凸集。所谓棱柱, 是  $\mathbb{R}^n$  (通常为  $\mathbb{R}^3$ ) 中的长方棱柱; 其尺寸记为  $a \times b \times c \times \dots$ , 约定  $a \leq b \leq c \leq \dots$ 。非正式地, 若  $\mathbb{R}^3$  中的棱柱尺寸为  $a \times b \times c$  且  $a \ll b$ , 则称其“扁平”; 若  $b$  与  $c$  同数量级, 则称其“方形”。此外, 有时分别把  $a, b, c$  称为棱柱的“厚度”“宽度”和“长度”。

有时使用椭球或更一般的凸集比使用长方棱柱更方便。下面的定义推广了引言中的  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ 。

定义 3.1. 对  $0 < a \leq b \leq c$ , 记  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  表示如下二元组:  $\mathcal{P}$  是  $\mathbb{R}^3$  中一族本质不同的凸集; 对每个  $P \in \mathcal{P}$ ,  $P$  的外 John 椭球三条轴的长度分别与  $a, b, c$  同数量级。  $Y$  是  $\mathcal{P}$  上的着色, 即对每个  $P \in \mathcal{P}$ , 有  $Y(P) \subset P$ 。

例如, 可以把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  写成  $(\mathbb{T}, Y)_{\delta \times \delta \times 1}$ 。最后, 若  $\sum_{P \in \mathcal{P}} |Y(P)| \geq \lambda \sum_{P \in \mathcal{P}} |P|$ , 则称  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  为  $\lambda$ -稠密。

定义 3.2. 若  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是棱柱及其着色, 且  $x \in \mathbb{R}^3$ , 定义

$$\mathcal{P}_Y(x) = \{P \in \mathcal{P} : x \in Y(P)\}.$$

类似地, 若  $\mathcal{P}$  是棱柱族 (或更一般的凸集族) 且没有着色, 则定义  $\mathcal{P}(x) = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$ 。

定义 3.3. 若  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ ; 对每个  $P \in \mathcal{P}'$  有  $Y'(P) \subset Y(P)$ ; 并且  $\sum_{P' \in \mathcal{P}'} |Y'(P')| \geq t \sum_{P \in \mathcal{P}} |Y(P)|$ , 则称  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的一个  $t$ -精化。实际应用中常有  $t \approx_\delta 1$ , 此时简称为  $\approx_\delta 1$  精化。

注意, 若  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是  $\lambda$ -稠密的, 而  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  是一个  $t$ -精化, 则  $\#\mathcal{P}' \geq \lambda t (\#\mathcal{P})$ 。

定义 3.4. 若  $W \subset \mathbb{R}^3$  是凸集, 其外 John 椭球  $E$  的尺寸为  $a \times b \times c$ , 则记  $\text{dir}(W) \in \text{Gr}(1; \mathbb{R}^3)$  和  $\Pi(W) \in \text{Gr}(2; \mathbb{R}^3)$ , 分别表示由  $E$  的主轴和次主轴张成的  $\mathbb{R}^3$  中一维和二维子空间。 $\text{dir}(W)$  在精度  $b/c$  内具有明确意义, 而  $\Pi(W)$  在精度  $a/b$  内具有明确意义。例如, 若  $T$  是一根  $\delta$ -管, 则  $\text{dir}(T)$  在精度  $\delta$  内具有明确意义, 而  $\Pi(T)$  只能在精度 1 内定义 (也就是说, 对一根  $\delta$ -管而言,  $\Pi(T)$  并不是一个真正有信息的量)。

下面采用一种提喻式记号: 若  $\mathcal{P}$  (或  $\mathbb{T}$ 、 $\mathcal{W}$  等) 是一族体积相同的凸集, 则用  $|P|$  (或  $|T|$ 、 $|W|$ )

等)表示其中任意一个凸集的体积。在实际应用中,即使 $\mathcal{P}$ 中集合的体积只是同数量级而不完全相等,也会略微滥用这一记号。

定义 3.5. 设  $W \subset \mathbb{R}^n$  为凸集。定义仿射线性变换  $\phi_W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 把  $W$  的外 John 椭球映到单位球。具体地, 若  $v_1, \dots, v_n$  是 John 椭球的各条轴, 其长度满足  $\ell_1 \leq \dots \leq \ell_n$ , 则选择  $\phi_W$ , 使 John 椭球第  $j$  条轴映到  $\mathbb{R}^n$  中的  $x_j$  轴。如果有两条或更多轴长度相同, 则任意选取其顺序。

若  $U \subset \mathbb{R}^n$ , 定义  $U^W = \phi_W(U)$ 。特别地, 若  $U$  是  $W$  的凸子集, 则  $U^W$  是单位球的凸子集, 且  $|U^W| \sim |U|/|W|$ 。这与 (1.8) 中先前对  $T^{T_\rho}$  的定义相容。

定义 3.6. 设  $\mathcal{U}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一族凸集,  $W$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集。定义

$$\mathcal{U}[W] = \{U \in \mathcal{U}: U \subset W\},$$

以及

$$\mathcal{U}^W = \{U^W: U \in \mathcal{U}[W]\}.$$

若  $Y$  是  $\mathcal{U}$  上的着色, 则用  $Y^W$  表示  $\mathcal{U}^W$  上对应的着色, 即对每个  $U^W \in \mathcal{U}^W$ , 定义  $Y^W(U^W) = \phi_W(Y(U))$ 。

注 3.7. 不要混淆  $\mathcal{U}^W$  与  $\mathcal{U}_W$ 。后一记号约定如下: 若  $\mathcal{U}$  和  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族, 则  $\mathcal{U}_W$  ( $W \in \mathcal{W}$ ) 表示由  $\mathcal{W}$  中元素索引的一族  $\mathcal{U}$  的子集。

## 3.2 记号表

为了便于阅读, 全文采用若干固定的记号约定。例如, 一些符号 (如  $\sigma, \omega$ ) 始终保留相同含义。下表汇总这些约定以供查阅。

| 符号                                 | 含义                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta, \rho, \tau$               | 表示尺度, 通常 $\delta \leq \rho \leq \tau$ 。                                                                                                                                      |
| $a, b, c$                          | 表示尺度, 通常为某个棱柱的尺寸。                                                                                                                                                            |
| $\theta$                           | 表示角度。                                                                                                                                                                        |
| $\varepsilon, \eta, \zeta, \alpha$ | 表示 (通常很小的) 指数, 例如以 $\delta^\eta, \rho^\varepsilon$ 等形式出现。                                                                                                                    |
| $\kappa, K$                        | 表示正的乘法常数, 例如 $ \bigcup T  \geq \kappa \delta^\varepsilon$ 或 $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq K \delta^{-\eta}$ 。通常 $\kappa > 0$ 很小, 而 $K \gg 1$ 很大。                               |
| $\sigma, \omega$                   | $\sigma, \omega$ 及其变体 $\sigma', \tilde{\sigma}$ 等始终表示与估计 $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ 和 $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ 相关的量。                                                 |
| $\sigma, \omega$                   | 在第 7 节和第 8 节中, 会固定 $\sigma$ 与 $\omega$ 的值, 并在整个章节保持不变。用粗体表示这些固定数, 以及后续仅依赖于它们的量。                                                                                              |
| $T, P, G, S, \square$              | 表示凸集。通常 $T$ 是管; $P, G$ 是尺寸为 $a \times b \times c$ 的棱柱; $S$ 是薄板; $\square$ 是尺寸为 $a \times c \times c$ 的“盒”。分别用 $\mathbb{T}, \mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S}$ 表示这类对象的集合。 |

|                                                 |                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{T}', \mathbb{T}_1, \tilde{\mathbb{T}}$ | $\mathbb{T}'$ 或 $\mathbb{T}_1$ 表示 $\mathbb{T}$ 的子集；类似地， $\mathbb{T}_2$ 表示 $\mathbb{T}_1$ 的子集等。 $\tilde{\mathbb{T}}$ 表示与 $\mathbb{T}$ 有关但不一定是其子集的新管族（例如可由 $\mathbb{T}$ 中各管的 2 倍膨胀组成）。 |
| $(\mathbb{T}', Y')_\delta$                      | 表示 $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ 的一个精化； $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ 同理。                                                                                                                  |

## 4 Wolff 公理与凸集因子分解

### 4.1 定义：Wolff 公理与覆盖

定义 4.1. 设  $\mathcal{U}, \mathcal{W}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族。

- (A) 若  $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} \mathcal{U}[W] = \mathcal{U}$ ，则称  $\mathcal{W}$  是  $\mathcal{U}$  的一个覆盖（或称  $\mathcal{W}$  覆盖  $\mathcal{U}$ ）。记为  $\mathcal{U} \prec \mathcal{W}$ 。
- (B) 若  $\mathcal{W}$  是一个覆盖，且每个  $U \in \mathcal{U}$  至多属于  $K$  个形如  $\mathcal{U}[W]$  的集合（相应地，至多属于 1 个），则称  $\mathcal{W}$  是一个  $K$ -近似分割覆盖（相应地，分割覆盖）。
- (D) 若  $\mathcal{W}$  是一个覆盖，并且对所有  $W \in \mathcal{W}$ ，数量  $|W|^{-1} \sum_{U \in \mathcal{U}[W]} |U|$  在乘法因子  $K$ （相应地，2）范围内彼此可比，则称  $\mathcal{W}$  是一个  $K$ -平衡覆盖（相应地，平衡覆盖）。

下述定义是定义 1.3 的一个轻微推广。

定义 1.3'. 设  $\mathcal{U}$  和  $\mathcal{W}$  为  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族。

(A) 定义  $\mathcal{U}$  相对于  $\mathcal{W}$  的 Katz–Tao Wolff 常数为所有满足下式的  $C > 0$  的下确界：

$$\sum_{U \in \mathcal{U}[W]} |U| \leq C|W| \quad \text{对所有 } W \in \mathcal{W}. \quad (4.1)$$

(B) 定义  $\mathcal{U}$  相对于  $\mathcal{W}$  的 Frostman Wolff 常数为所有满足下式的  $C > 0$  的下确界：

$$\sum_{U \in \mathcal{U}[W]} |U| \leq C|W| \sum_{U \in \mathcal{U}} |U| \quad \text{对所有 } W \in \mathcal{W}. \quad (4.2)$$

注 4.2.

(A) 为简化记号，定义  $C_{KT-CW}(\mathcal{U})$ （相应地  $C_{F-CW}(\mathcal{U})$ ）为当  $\mathcal{W}$  取  $\mathbb{R}^n$  中全部凸集时， $\mathcal{U}$  的 Katz–Tao（相应地 Frostman）Wolff 常数。定义  $C_{F-SW}(\mathcal{U})$  为当  $\mathcal{W}$  取  $\mathbb{R}^n$  中全部薄板时的 Frostman Wolff 常数。注意，这些定义与定义 1.3 相容。

(B) 在 [27] 的意义下（见第 655 页性质 (\*) 及其前面的讨论），一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  满足 Wolff 公理，是指当  $\mathcal{W}$  取所有尺寸为  $10\delta \times \rho \times \cdots \times \rho \times 2$ 、其中  $0 < \delta \leq \rho \leq 2$  的长方棱柱时， $\mathbb{T}$  的 Katz–Tao Wolff 常数很小。

(C) 在某些论证中, 需要考虑上述定义的一个变体: 把 (4.1) 右侧的  $|W|$  换成  $|W \cap B(0, 1)|/|B(0, 1)|$ , 并对 (4.2) 作同样替换。这样得到的量在定义 3.5 中的  $\phi_W$  等仿射映射下具有自然的变换性质。

(D) 注意, 即使  $\mathcal{U}$  是多重集, 上述定义仍然有意义。这一点将在第 10.1 节中使用。

(E) 若非空集合  $\mathcal{U}$  由体积相同的凸集组成, 则  $C_{F-CW}(\mathcal{U}) \leq C$  蕴含  $\#\mathcal{U} \geq C^{-1}|U|^{-1}$ 。事实上, 取  $W$  为  $\mathcal{U}$  中任一凸集, 则 (4.2) 左侧等于  $|U|$ , 右侧等于  $C|U|^2(\#\mathcal{U})$ 。粗略地说,  $C_{KT-CW}(\mathcal{U})$  小意味着  $\mathcal{U}$  “稀疏”, 而  $C_{F-CW}(\mathcal{U})$  小意味着  $\mathcal{U}$  “稠密”。

注 4.3.

(A) Frostman Wolff 常数会沿覆盖 “向上继承”。更准确地说, 若  $\mathcal{U}$  与  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族, 且  $\mathcal{W}$  是  $\mathcal{U}$  的一个  $K$ -平衡覆盖, 则

$$C_{F-CW}(\mathcal{W}) \lesssim KC_{F-CW}(\mathcal{U}) \quad \text{且} \quad C_{F-SW}(\mathcal{W}) \lesssim KC_{F-SW}(\mathcal{U}). \quad (4.3)$$

(B) Katz–Tao Wolff 常数会沿覆盖 “向下继承”。更准确地说, 若  $\mathcal{U}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族,  $W$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集, 则

$$C_{KT-CW}(\mathcal{U}^W) = C_{KT-CW}(\mathcal{U}[W]) \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}). \quad (4.4)$$

(C) Frostman 薄板 Wolff 常数相对于覆盖具有 “次乘法性”。更准确地说, 若  $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$  是凸集  $W \subset \mathbb{R}^n$  内的凸集族, 则在某些情形中,  $C_{F-SW}(\mathcal{U}^W)$  可由  $\max_{V \in \mathcal{V}} C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) C_{F-SW}(\mathcal{V}^W)$  控制。在某些特殊情形中, Katz–Tao 凸 Wolff 常数也具有类似性质。精确陈述见第 4.4 节。

## 4.2 凸集的因子分解

正如注 4.3 所述, Frostman Wolff 常数沿覆盖向上继承, 而 Katz–Tao Wolff 常数向下继承。下面的定义使我们能够在多尺度分析和尺度归纳中系统利用这一事实。

定义 4.4. 设  $\mathcal{U}$  与  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族, 且  $K > 0$ 。

(A) 若  $\mathcal{W}$  覆盖  $\mathcal{U}$ , 且  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  满足 Katz–Tao (相应地 Frostman) 凸 Wolff 公理, 则称  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  相对于 Katz–Tao (相应地 Frostman) 凸 Wolff 公理从上方因子分解  $\mathcal{U}$ 。

(B) 若  $\mathcal{W}$  覆盖  $\mathcal{U}$ , 且对每个  $W \in \mathcal{W}$ , 集合  $\mathcal{U}^W$  以误差  $K$  满足 Katz–Tao (相应地 Frostman) 凸 Wolff 公理, 则称  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  相对于 Katz–Tao (相应地 Frostman) 凸 Wolff 公理从下方因子分解  $\mathcal{U}$ 。

(C) 若把上述 (A) (相应地 (B)) 中的凸 Wolff 公理换成薄板 Wolff 公理, 则称  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  相对于 Katz–Tao (或 Frostman) 薄板 Wolff 公理从上方 (相应地从下方) 因子分解  $\mathcal{U}$ 。

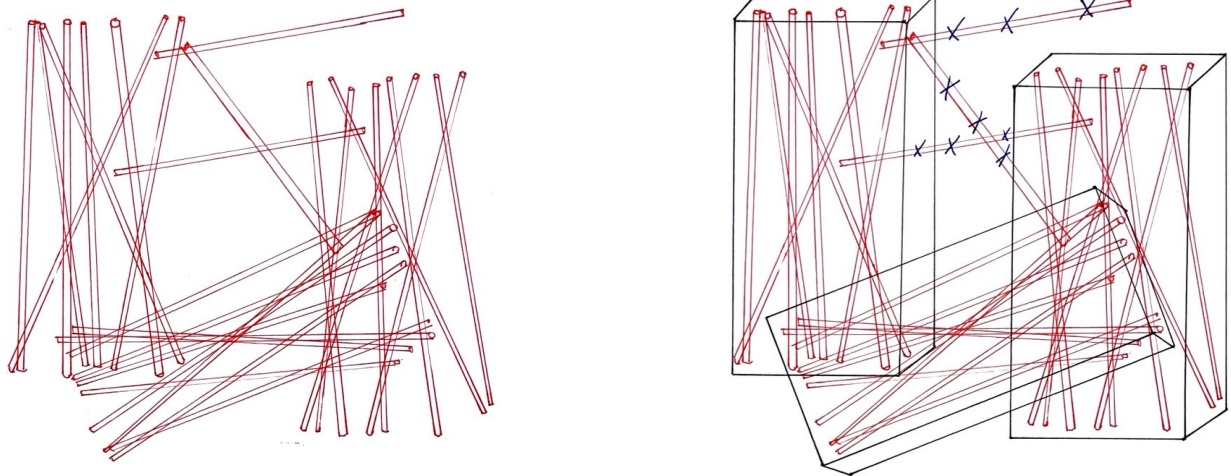


图 5: 左:  $\mathcal{U}$  是一族聚集到若干长方棱柱中的管 (红色)。右: 命题 4.6 找出了这些棱柱 (黑色)。  $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$  中的管以叉号标出。

注 4.5. 定义 4.4 是一个更一般定义的若干特殊情形。若  $\mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$  都是  $\mathbb{R}^n$  中的凸集族, 可以定义  $\mathcal{W}$  相对于由  $\mathcal{V}$  指定的 Katz–Tao (或 Frostman) Wolff 公理从上方 (或下方) 因子分解  $\mathcal{U}$  的含义。定义 4.4 的 (A)、(B) 对应  $\mathcal{V}$  为  $\mathbb{R}^n$  中全部凸集的特殊情形, 而 (C) 对应  $\mathcal{V}$  为  $\mathbb{R}^n$  中全部薄板的情形。

定义 1.3' 的表述正是为了得到下面的结果: 对  $\mathbb{R}^n$  中任意凸集族  $\mathcal{U}$ , 都存在某个  $\mathcal{W}$ , 使其以较小误差相对于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方因子分解  $\mathcal{U}$ , 同时以较小误差相对于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理从上方因子分解  $\mathcal{U}$ 。精确陈述如下。

**命题 4.6.** 设  $\mathcal{U}$  为  $\mathbb{R}^n$  单位球中一族有限个全等凸集, 每个凸集都包含一个半径为  $\delta$  的球。令  $K = 100^n e^{100\sqrt{\log(\delta^{-1}\#\mathcal{U})}}$  ( $K$  的确切形式并不重要; 关键是若  $\#\mathcal{U} \leq \delta^{-100}$ , 则  $K \lesssim_\delta 1$ )。

则存在一族  $\mathbb{R}^n$  中全等凸集  $\mathcal{W}$  以及子集  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ , 满足:

i)  $\#\mathcal{U}' \geq K^{-1}(\#\mathcal{U})$ ;

ii)  $\mathcal{W}$  是  $\mathcal{U}'$  的一个  $K$ -平衡、 $K$ -近似分割覆盖, 并且

$$\#\mathcal{U}'[W] \geq K^{-1} C_{KT-CW}(\mathcal{U}') |W| |\mathcal{U}|^{-1} \quad \text{对每个 } W \in \mathcal{W}. \quad (4.5)$$

iii)  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  相对于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理从上方因子分解  $\mathcal{U}'$ ;

iv)  $\mathcal{W}$  以误差  $K$  相对于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方因子分解  $\mathcal{U}'$ 。

命题 4.6 的证明将使用下面的“迭代图删减”引理。该引理允许我们删减一个二部图, 找出一个诱导子图, 使其中每个顶点都有许多邻点。

**引理 4.7.** 设  $G = (A \sqcup B, E)$  为二部图。则存在子图  $G' = (A' \sqcup B', E')$ , 使  $\#E' \geq \#E/2$ ;  $A'$  中每个顶点的度数至少为  $\frac{\#E}{4\#A}$ ;  $B'$  中每个顶点的度数至少为  $\frac{\#E}{4\#B}$ 。

引理 4.7 可通过迭代删除邻点过少的顶点证明, 例如见 [7]。

命题 4.6 的证明.

**步骤 1.** 取  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ , 使下列数量达到最小:

$$\min_{\substack{\mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \\ \mathcal{U}' \neq \emptyset}} \exp \left[ \left( \log \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}'} \right)^2 \right] C_{KT-CW}(\mathcal{U}'). \quad (4.6)$$

由于  $C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) \geq 1$ , 有

$$\exp \left[ \left( \log \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}_0} \right)^2 \right] \leq \exp \left[ \left( \log \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}_0} \right)^2 \right] C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}) \leq \#\mathcal{U}.$$

整理得

$$\#\mathcal{U}_0 \geq e^{-\sqrt{\log(\#\mathcal{U})}}(\#\mathcal{U}). \quad (4.7)$$

若  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_0$  且  $\#\mathcal{U}' \geq \frac{1}{2}(\#\mathcal{U}_0)$ , 则

$$\exp \left[ \left( \log \frac{2(\#\mathcal{U})}{\#\mathcal{U}_0} \right)^2 \right] C_{KT-CW}(\mathcal{U}') \geq \exp \left[ \left( \log \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}'} \right)^2 \right] C_{KT-CW}(\mathcal{U}') \geq \exp \left[ \left( \log \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}_0} \right)^2 \right] C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0).$$

整理并使用 (4.7), 得到

$$C_{KT-CW}(\mathcal{U}') \geq \kappa_0 C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0), \quad \text{其中 } \kappa_0 = e^{-2 \log 2 \sqrt{\log(\#\mathcal{U})}}. \quad (4.8)$$

**步骤 2.** 按如下过程选择  $\mathbb{R}^n$  中闭凸集  $W_1, W_2, \dots$  与集合  $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \dots$ 。从  $j = 1$  开始, 选择  $W_j$  使数量  $\#\mathcal{U}_{j-1}[W_j]/|W_j|$  最大。<sup>1</sup> 由  $C_{KT-CW}(\mathcal{U}_{j-1})$  的定义, 可以选择  $W_j$  使

$$\#\mathcal{U}_{j-1}[W_j] = C_{KT-CW}(\mathcal{U}_{j-1}) \frac{|W_j|}{|U|}. \quad (4.9)$$

(回顾  $|U|$  表示  $\mathcal{U}$  中一个集合的体积, 且这些集合体积相同。) 定义  $\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_{j-1} \setminus \mathcal{U}_{j-1}[W_j]$ 。持续该过程, 直到  $\#\mathcal{U}_j < \frac{1}{2}(\#\mathcal{U}_0)$ 。

令  $\mathcal{W}_0 = \{W_1, \dots, W_{j-1}\}$ 。则

$$\# \left( \bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} \mathcal{U}_0[W] \right) = \#(\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{U}_j) > \frac{1}{2}(\#\mathcal{U}_0). \quad (4.10)$$

此外, 对每个  $i = 1, \dots, j$ , 有  $\#\mathcal{U}_{i-1} \geq \frac{1}{2}(\#\mathcal{U}_0)$ , 故由 (4.9) 与 (4.8),

$$\#\mathcal{U}_{i-1}[W_i] = C_{KT-CW}(\mathcal{U}_{i-1}) \frac{|W_i|}{|U|} \geq \kappa_0 C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) \frac{|W_i|}{|U|}. \quad (4.11)$$

<sup>1</sup> 由于  $\mathcal{U}$  是有限个紧集组成的集合, 这样的最大值存在; 即使只在常数因子内逼近最大值, 证明也同样成立。

于是对任意  $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}_0$ , 为了比较  $\#(\bigcup_{W_i \in \mathcal{W}'} \mathcal{U}_0[W_i])$  与  $\sum_{W_i \in \mathcal{W}'} \#\mathcal{U}_0[W_i]$ , 有

$$\begin{aligned} \kappa_0 \frac{C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)}{|U|} \sum_{W_i \in \mathcal{W}'} |W_i| &\leq \sum_{W_i \in \mathcal{W}'} \#\mathcal{U}_{i-1}[W_i] = \# \left( \bigsqcup_{W_i \in \mathcal{W}'} \mathcal{U}_{i-1}[W_i] \right) \\ &\leq \# \left( \bigcup_{W_i \in \mathcal{W}'} \mathcal{U}_0[W_i] \right) \leq \sum_{W_i \in \mathcal{W}'} \#\mathcal{U}_0[W_i] \leq \frac{C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)}{|U|} \sum_{W_i \in \mathcal{W}'} |W_i| \end{aligned} \quad (4.12)$$

(4.12) 中的等号使用了关键事实: 若  $i \neq i'$ , 则  $\mathcal{U}_{i-1}[W_i]$  与  $\mathcal{U}_{i'-1}[W_{i'}]$  不交。

**步骤 3。** 每个  $W \in \mathcal{W}_0$  都有一个 John 椭球, 其轴长为  $\ell_1, \dots, \ell_n$ 。由于每个  $\mathcal{U}_0[W]$  非空, 且每个  $U \in \mathcal{U}_0$  都包含一个半径为  $\delta$  的球, 因此对每个  $i$  有  $\ell_i \geq \delta$ 。又因  $\mathcal{U}$  中各集合包含于单位球, 不妨假设  $\ell_i \leq 2$ 。由二进分划原则和 (4.10), 存在  $a_1, \dots, a_n$  以及  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_0$ , 满足:

(i) 每个  $W \in \mathcal{W}_1$  的 John 椭球轴长  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_n$ , 且  $\ell_i \in [a_i/2, a_i]$ ;

$$(ii) \quad \# \left( \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} \mathcal{U}_0[W] \right) \geq (100|\log \delta|)^{-n} (\#\mathcal{U}_0). \quad (4.13)$$

把每个  $W$  替换为  $W_0$  的一个全等副本——即轴长为  $a_1, \dots, a_n$  的椭球——并记所得集合为  $\mathcal{W}_2$ 。显然, 以  $\mathcal{W}_2$  代替  $\mathcal{W}_1$  后 (4.13) 仍成立; 对任意  $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}_2$ , (4.12) 也仍成立, 只是第一个不等式右侧相差一个  $2^n$  因子。定义  $\mathcal{U}_2 = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_2} \mathcal{U}_0[W]$  (此前已经定义过一系列  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ , 因此这里再次使用  $\mathcal{U}_2$  是轻微的记号滥用);  $\mathcal{U}_2$  的基数由 (4.13) 右侧给出下界。

由于对所有  $W \in \mathcal{W}_2$  都有  $\mathcal{U}_0[W] = \mathcal{U}_2[W]$ , 在 (4.12) 中令  $\mathcal{W}' = \mathcal{W}_2$  (先使用最后一个不等式, 再使用最前面的若干不等式), 得到

$$\begin{aligned} \#\{(U, W) \in \mathcal{U}_2 \times \mathcal{W}_2 : U \subset W\} &= \sum_{W \in \mathcal{W}_2} \#\mathcal{U}_0[W] \leq \frac{C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)}{|U|} \sum_{W \in \mathcal{W}_2} |W| \\ &\leq 2^n \kappa_0^{-1} \# \left( \bigcup_{W \in \mathcal{W}_2} \mathcal{U}_0[W] \right) = 2^n \kappa_0^{-1} (\#\mathcal{U}_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

上式中前两个不等式来自 (4.12), 最后一个等号来自  $\mathcal{U}_2$  的定义。

**步骤 4。** 构造二部关联图  $(\mathcal{I}, \mathcal{U}_2 \times \mathcal{W}_2)$ , 边由所有满足  $U \subset W$  的对  $(U, W)$  构成。该图满足:

(i)  $\mathcal{I}$  至多有  $2^n \kappa_0^{-1} (\#\mathcal{U}_2)$  条边;

(ii) 每个  $U \in \mathcal{U}_2$  至少有一个邻点;

(iii) 每个  $W \in \mathcal{W}_2$  的邻点数介于  $2^{-n} \kappa_0 C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) |W_0| |U|^{-1}$  与  $C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) |W_0| |U|^{-1}$  之间。

由 (i)、(iii) 得

$$\#\mathcal{W}_2 \leq 2^{2n} \kappa_0^{-2} \frac{(\#\mathcal{U}_2) |U|}{C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0) |W_0|}. \quad (4.15)$$

下面构造  $(\mathcal{I}, \mathcal{U}_2 \times \mathcal{W}_2)$  的一个诱导子图。首先删去所有邻点多于  $2^{n+1}\kappa_0^{-1}$  的  $U \in \mathcal{U}_2$ ，记所得诱导子图为  $(\mathcal{I}_3, \mathcal{U}_3 \times \mathcal{W}_2)$ 。由 (i)、(ii)，有  $\#\mathcal{U}_3 \geq \frac{1}{2}\#\mathcal{U}_2$  且  $\#\mathcal{I}_3 \geq \#\mathcal{U}_3$ 。再对  $(\mathcal{I}_3, \mathcal{U}_3 \times \mathcal{W}_2)$  应用引理 4.7，记所得诱导子图为  $(\mathcal{I}', \mathcal{U}' \times \mathcal{W})$ 。

**步骤 5。** 验证  $\mathcal{U}'$  与  $\mathcal{W}$  满足命题 4.6 的 (i)–(iv)。首先，

$$\#\mathcal{U}' \geq \frac{\kappa_0}{2^{n+1}}(\#\mathcal{I}') \geq \frac{\kappa_0}{2^{n+3}}(\#\mathcal{I}_3) \geq \frac{\kappa_0}{2^{n+3}}(\#\mathcal{U}_3) \geq \frac{\kappa_0}{2^{n+4}}(\#\mathcal{U}_2) \geq K^{-1}(\#\mathcal{U}),$$

其中使用了 (4.13) 对  $\#\mathcal{U}_2$  的下界、(4.7) 对  $\#\mathcal{U}_0$  的下界，以及命题 4.6 中  $K$  的定义。这证明 (i)。

对于 (ii)，由于  $(\mathcal{I}', \mathcal{U}' \times \mathcal{W})$  中每个  $U \in \mathcal{U}'$  至多有  $K$  个邻点， $\mathcal{W}$  是  $\mathcal{U}'$  的一个  $K$ -近似分割覆盖。还需验证 (4.5)；由于  $\#\mathcal{U}'[W] \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}')|W||U|^{-1}$ ，一旦验证该式，也可推出  $\mathcal{W}$  是  $K$ -平衡覆盖。由引理 4.7 和 (4.15)，对每个  $W \in \mathcal{W}$  有

$$\begin{aligned} \#\mathcal{U}'[W] &\geq \frac{1}{4}(\#\mathcal{I}_3)(\#\mathcal{W}_2)^{-1} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\#\mathcal{U}_2\right)\left(2^{-2n}\kappa_0^2\frac{C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)|W_0|}{(\#\mathcal{U}_2)|U|}\right) \\ &\geq (2^{-2n-4}\kappa_0^2)C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)|W_0||U|^{-1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

又因  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_0$ ，有  $C_{KT-CW}(\mathcal{U}') \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)$ 。

对于 (iii)，取任意凸集  $V \subset \mathbb{R}^n$ 。由于每个  $U \in \mathcal{U}_3$  至多有  $2^{n+1}\kappa_0^{-1}$  个邻点，且  $(\mathcal{I}', \mathcal{U}' \times \mathcal{W})$  是  $(\mathcal{I}_3, \mathcal{U}_3 \times \mathcal{W}_2)$  的诱导子图，所以每个  $U \in \mathcal{U}'$  至多包含在  $2^{n+1}\kappa_0^{-1}$  个集合  $\mathcal{U}'[W]$  中。于是

$$\#\mathcal{U}'[V] \geq 2^{-n-1}\kappa_0 \sum_{W \in \mathcal{W}[V]} \#\mathcal{U}'[W] \geq (2^{-3n-5}\kappa_0^3)C_{KT-CW}(\mathcal{U}_0)|W_0||U|^{-1}(\#\mathcal{W}[V]), \quad (4.17)$$

最后一个不等式使用了 (4.16)。另一方面，

$$\#\mathcal{U}'[V] \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}')|V||W_0|^{-1}. \quad (4.18)$$

比较 (4.17) 与 (4.18)，得到  $\#\mathcal{W}[V] \leq K|V||W_0|^{-1}$ ，即 (iii)。

最后证明 (iv)。取  $W \in \mathcal{W}$  和凸集  $V \subset W$ 。则

$$\#(\mathcal{U}'[W])[V] \leq \#\mathcal{U}'[V] \leq C_{KT-CW}(\mathcal{U}')|V||U|^{-1}. \quad (4.19)$$

比较 (4.19) 与由 (4.16) 验证的 (4.5)，得到

$$\#(\mathcal{U}'[W])[V] \leq K|V||W|^{-1}(\#\mathcal{U}'[W]).$$

这正是  $C_{F-CW}((\mathcal{U}')^W) \leq K$ 。 □

### 4.3 凸集与 Frostman 薄板 Wolff 公理

本节目标是证明：经过一次精化后，任意凸集族都可以分解为彼此不相互作用的若干部分，并且每一部分在适当重标度后都满足 Frostman 薄板 Wolff 公理。精确陈述如下。

**命题 4.8.** 对任意  $n \geq 2$ ,  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$  与  $\kappa, K > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $\mathcal{U}$  是  $\mathbb{R}^n$  单位球中一族闭凸集, 每个凸集都包含一个半径为  $\delta$  的球。对每个  $U \in \mathcal{U}$ , 设  $Y(U) \subset U$  为着色, 且  $|Y(U)| \geq \delta^\eta |U|$ 。

则存在子集  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ ; 着色  $Y'(U') \subset Y(U')$  ( $U' \in \mathcal{U}'$ ); 以及  $\mathbb{R}^n$  中一族闭凸集  $\mathcal{W}$ , 满足:

- i)  $\mathcal{W}$  以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  相对于 *Frostman* 薄板 *Wolff* 公理从下方因子分解  $\mathcal{U}'$ ;
- ii) 各集合  $U'[W]$  ( $W \in \mathcal{W}$ ) 彼此不相互作用, 即集合族  $\{\bigcup_{U' \in \mathcal{U}'[W]} Y'(U') : W \in \mathcal{W}\}$  两两不交;
- iii) 子集  $\mathcal{U}'$  与精化着色  $Y'$  保留原集合  $(\mathcal{U}, Y)$  的大部分质量, 即

$$\sum_{U' \in \mathcal{U}'} |Y'(U')| \geq \kappa \delta^\varepsilon (\log \#\mathcal{U})^{-K} \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|. \quad (4.20)$$

命题 4.8 将使用 Brunn 定理的下述推论。

**引理 4.9.** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  为凸集,  $H \subset \mathbb{R}^n$  为超平面, 且  $s > 0$ ,  $t \in (0, 1]$ 。若  $|U \cap N_s(H)| = t|U|$ , 则  $U \subset N_{K_n s/t}(H)$ , 其中  $K_n$  仅依赖于  $n$ 。

证明. 不妨设超平面  $H = \{x_1 = 0\}$ 。令  $f(t) = |U \cap \{x_1 = t\}|^{1/(n-1)}$  (这里  $|\cdot|$  表示  $(n-1)$  维 Lebesgue 测度), 并令  $I = \text{supp}(f)$ 。目标是证明  $|I| \leq K_n s/t$ 。

由 Brunn 定理,  $f$  在  $I$  上为凹函数。比较估计  $t|U| = |U \cap N_s(H)| \leq (2s)(\sup f)^{n-1}$  与  $|U| \geq K_n |I| (\sup f)^{n-1}$  即得结论; 后一估计来自  $f$  的凹性。□

将引理 4.9 与一个 Córdoba 型  $L^2$  论证结合, 得到下述结果。

**引理 4.10.** 设  $\lambda \in (0, 1]$ ,  $\mathcal{U}$  是  $\mathbb{R}^n$  单位球中一族闭凸集, 每个凸集都包含一个半径为  $\delta$  的球。对每个  $U \in \mathcal{U}$ , 设  $Y(U) \subset U$  为着色, 且  $|Y(U)| \geq \lambda |U|$ 。

则存在  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ ; 着色  $Y'(U) \subset Y(U)$  ( $U \in \mathcal{U}'$ ); 以及一族无限薄板  $\mathcal{S}$  (即  $\mathbb{R}^n$  中某个超平面的  $s$ -邻域), 满足:

- i)  $\mathcal{S}$  是  $\mathcal{U}'$  的一个分割覆盖;
- ii) 若  $S \in \mathcal{S}$  的厚度为  $s$ , 则  $U'[S]$  经重标度后具有  $O(s^{-1})$  的 *Frostman* 薄板 *Wolff* 常数。更具体地, 若  $\tilde{S} \subset S$  是一个包含  $U'[S]$  中凸集的  $s \times 2 \times \cdots \times 2$  薄板, 则  $C_{F-SW}(\mathcal{U}'^{\tilde{S}}) \lesssim s^{-1}$ ;
- iii) 各集合  $\bigcup_{U \in \mathcal{U}'[S]} Y'(U)$  ( $S \in \mathcal{S}$ ) 两两不交;
- iv) 对每个  $U \in \mathcal{U}'$ , 有  $|Y'(U)| \geq \frac{\lambda}{2} |U|$ , 并且

$$\sum_{U \in \mathcal{U}'} |U| \gtrsim \log(\lambda^{-1} \delta^{-1} \#\mathcal{U})^{-1} \lambda \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|. \quad (4.21)$$

证明.

**步骤 1.** 定义  $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ , 并对每个  $U \in \mathcal{U}_0$  定义  $Y_0(U) = Y(U)$ 。对  $i = 1, \dots$ , 令  $S_i = N_{s_i}(H_i)$  为使下列数量最大的薄板:

$$s_i^{-1} \sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}[S_i]} |U|. \quad (4.22)$$

令  $\mathcal{U}^{(i)} = \mathcal{U}_{i-1}[S_i]$ 。由  $S_i$  的极大性,  $\mathcal{U}^{(i)}$  满足引理 4.10 的结论 (ii)。

对每个  $U \in \mathcal{U}_{i-1}$ , 定义  $Y_i(U) = Y_{i-1}(U) \setminus S_i$ , 并令

$$\mathcal{U}_i = \{U \in \mathcal{U}_{i-1} : |Y_i(U)| \geq \frac{\lambda}{2}|U|\}.$$

特别地,  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}^{(i)} = \emptyset$ 。

**步骤 2.** 声称

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}} |U \cap S_i| \lesssim \log(\lambda^{-1} \delta^{-1} \#\mathcal{U}) \sum_{U \in \mathcal{U}^{(i)}} |U|. \quad (4.23)$$

证明如下。由于  $\sum_{U \in \mathcal{U}^{(i)}} |U| \geq \frac{\lambda}{2} \delta^n$ , 满足  $|U \cap S_i| \leq \frac{1}{4} \lambda \delta^n (\#\mathcal{U})^{-1}$  的  $U \in \mathcal{U}_{i-1}$  所贡献的量可以忽略。对每个二进数  $t \in [\frac{1}{4} \lambda \delta^n (\#\mathcal{U})^{-1}, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{U \in \mathcal{U}_{i-1} \\ |U \cap S| \sim t|U|}} |U \cap S_i| &\lesssim t \sum_{\substack{U \in \mathcal{U}_{i-1} \\ |U \cap S| \sim t|U|}} |U| \leq t \sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}[N_{K_n s_i/t}(H_i)]} |U| \\ &\leq K_n \sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}[S_i]} |U| = K_n \sum_{U \in \mathcal{U}^{(i)}} |U|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

第二个不等式来自包含关系

$$\{U \in \mathcal{U}_{i-1} : |U \cap S| \sim t|U|\} \subset \{U \in \mathcal{U}_{i-1}[N_{K_n s/t}(H_i)]\}$$

其中常数  $K_n$  只依赖于  $n$ ; 这正是引理 4.9。第三个不等式使用了 (4.22) 意义下  $S_i$  的极大性。对所有二进  $t$  对 (4.24) 求和即可得到 (4.23)。

**步骤 3.** 当  $\mathcal{U}_N = \emptyset$  时停止上述过程。定义  $\mathcal{U}' = \bigsqcup_{i=1}^N \mathcal{U}^{(i)}$ ; 对每个  $U \in \mathcal{U}'$ , 令  $Y'(U) = Y_{i-1}(U)$ , 其中  $i$  是满足  $U \in \mathcal{U}^{(i)}$  的唯一指标。结论 (i)、(iii) 立即由构造得到; 对每个  $U' \in \mathcal{U}'$ , 也有  $|Y'(U')| \geq \frac{\lambda}{2}|U'|$ 。结论 (ii) 已在步骤 1 验证。

还需证明 (4.21)。声称每个  $U \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_0$  对和

$$\sum_{i=1}^N \sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}} |U \cap S_i|,$$

至少贡献  $\frac{\lambda}{2}|U|$ , 即  $\sum_{i: U \in \mathcal{U}_{i-1}} |U \cap S_i| \geq \frac{\lambda}{2}|U|$ 。事实上, 若  $j > 0$  是满足  $U \notin \mathcal{U}_j$  的最小指标, 则  $|Y(U) \setminus \bigcup_{i=1}^j S_i| < \frac{\lambda}{2}|U|$ 。又因  $|Y(U)| \geq \lambda|U|$ , 所以

$$\sum_{i=1}^j |U \cap S_i| \geq \frac{\lambda}{2}|U|,$$

因此

$$\sum_{i=1}^N \sum_{U \in \mathcal{U}_{i-1}} |U \cap S_i| \geq \frac{\lambda}{2} \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|. \quad (4.25)$$

比较 (4.23) 与 (4.25) 即得 (4.21)。  $\square$

命题 4.8 可由反复应用引理 4.10 得到。下面给出细节。

命题 4.8 的证明. 令  $\lambda = \frac{1}{4}\delta^\eta$ 。丢弃所有满足  $|Y(U)| < \lambda|U|$  的  $U \in \mathcal{U}$  后, 不妨假设  $\mathcal{U}$  满足引理 4.10 的假设。

令  $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ , 并对每个  $U \in \mathcal{U}_0$  令  $Y_0(U) = Y(U)$ 。令  $\mathcal{P}_0 = \{B(0, 1)\}$ ,  $\mathcal{W}_0 = \emptyset$ 。集合  $\mathcal{P}_0$  表示尚需由引理 4.10 “处理”的凸集, 而  $\mathcal{W}_0$  将存放已经满足命题 4.8 假设的凸集。

迭代构造  $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{i-1}$  与  $Y_i(U) \subset Y_{i-1}(U)$ ; 单位球  $B(0, 1)$  中凸集族  $\mathcal{W}_i \supset \mathcal{W}_{i-1}$ ; 以及  $B(0, 1)$  中凸集族  $\mathcal{P}_i$ , 使:

1. 对每个  $W \in \mathcal{W}_i$ ,  $C_{F-SW}(\mathcal{U}_i^W) \lesssim \delta^{-\varepsilon}$  (回顾  $\mathcal{U}_i^W = \phi_W(\mathcal{U}_i[W])$ );
2. 对每个  $P \in \mathcal{P}_i$ ,  $|P| \leq \delta^{i\varepsilon}|B(0, 1)|$ ;
3.  $\mathcal{W}_i \sqcup \mathcal{P}_i$  是  $\mathcal{U}_i$  的分割覆盖;
4. 当  $V$  遍历  $\mathcal{P}_i \sqcup \mathcal{W}_i$  时, 各集合  $\bigcup_{U \in \mathcal{U}_i[V]} Y_i(U)$  两两不交;
5. 对每个  $U \in \mathcal{U}_i$ ,  $|Y_i(U)| \geq 2^{-i}\lambda|U|$ ;

$$6. \quad \sum_{V \in \mathcal{P}_i \cup \mathcal{W}_i} \sum_{U \in \mathcal{U}_i[V]} |Y_i(U)| \gtrsim \log(\delta^{-1}\#\mathcal{U})^i \lambda^i \sum_{U \in \mathcal{U}} |U|.$$

当  $i = 0$  时这六项显然成立。第  $i$  步先令  $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_{i-1}$ 、 $\mathcal{P}_i = \emptyset$ , 并令  $\mathcal{U}_i = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_{i-1}} \mathcal{U}_{i-1}[W]$ ; 对每个  $U \in \mathcal{U}_i$ , 令  $Y_i(U) = Y_{i-1}(U)$ 。

对每个  $P \in \mathcal{P}_{i-1}$ , 把引理 4.10 (其中  $\lambda$  换成  $2^{-(i-1)}\lambda$ ) 应用于椭圆族  $\mathcal{U}_{i-1}^P = \phi_P(\mathcal{U}_{i-1}[P])$  及其着色  $\phi_P(Y_{i-1}(U))$ 。得到一族薄板  $\mathcal{S}$ 、子集  $\mathcal{U}'_{i-1}[P] \subset \mathcal{U}_{i-1}[P]$ , 以及这些椭圆上的着色 (记为  $Y_i(U)$ )。把  $\mathcal{U}'_{i-1}[P]$  中的椭圆及其着色加入  $\mathcal{U}_i$ 。然后逐一处理  $S \in \mathcal{S}$ :

- 若  $S$  的厚度  $\geq \delta^\varepsilon$ , 则对应凸集  $W = P \cap \phi_P^{-1}(S)$ , 满足  $C_{F-SW}((\mathcal{U}'_{i-1}[P])^W) \lesssim \delta^{-\varepsilon}$ 。把该集合加入  $\mathcal{W}_i$ ;
- 若  $S$  的厚度  $\leq \delta^\varepsilon$ , 则对应凸集  $P' = P \cap \phi_P^{-1}(S)$ , 并且

$$|P'| \leq \delta^\varepsilon |P| \leq \delta^\varepsilon (\delta^{(i-1)\varepsilon} |B(0, 1)|) = \delta^{i\varepsilon} |B(0, 1)|.$$

把该集合加入  $\mathcal{P}_i$ 。

对每个  $P \in \mathcal{P}_{i-1}$  完成这一过程后, 性质 1、2 立即成立, 而性质 3-6 由引理 4.10 中对应性质推出。

当输出  $\mathcal{P}_N = \emptyset$  时停止。由于每个  $U \in \mathcal{U}$  的体积至少为  $\delta^n$ , 上述过程至多经过  $n/\varepsilon$  步就必须停止。令  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_N$ 、 $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_N$ 、 $Y'(U) = Y_N(U)$ 。为了得到 (4.20), 只需把  $\eta$  选得足够小, 使  $\delta^{N\eta} \leq \delta^\varepsilon$ ; 例如取  $\eta \sim \varepsilon^2/n$ 、 $K \sim n/\varepsilon$  即可。  $\square$

#### 4.4 Frostman 薄板 Wolff 公理与覆盖

本节将陈述并证明注 4.3(C) 的一个精确版本。先讨论 Frostman 薄板 Wolff 公理。

**引理 4.11.** 设  $W \subset \mathbb{R}^n$  为凸集,  $\mathcal{U}$  与  $\mathcal{V}$  为  $W$  的凸子集族, 满足  $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ , 且对每个  $V \in \mathcal{V}$  都有  $\#\mathcal{U}[V] \leq K(\#\mathcal{U})/(\#\mathcal{V})$ 。假设  $\mathcal{U}$  中各集合体积相同,  $\mathcal{V}$  中各集合亦然。最后, 假设  $\mathcal{U}^W$  中每个集合的直径都至少为  $1/100$ 。

则

$$C_{F-SW}(\mathcal{U}^W) \lesssim \log(2 + |\mathcal{U}^W|^{-1}) K \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) \right) \left( C_{F-SW}(\mathcal{V}^W) \right). \quad (4.26)$$

证明. 首先, 为简化记号, 不妨假设  $W = B(0, 1)$ 。事实上, 若把  $W$  替换为  $W^W$  (后者与  $B(0, 1)$  可比较), 把  $\mathcal{U}$  替换为  $\mathcal{U}^W$ , 并把  $\mathcal{V}$  替换为  $\mathcal{V}^W$ , 则引理 4.11 的假设与结论均不变。特别地, 此时  $\mathcal{U}$  中每个集合的直径都至少为  $1/100$ 。

固定一个截断的加厚超平面  $S = N_s(H) \cap B(0, 1)$ , 并假设  $\mathcal{U}[S] \neq \emptyset$  (特别地,  $s \geq |\mathcal{U}|/K_n$ , 其中  $K_n$  只依赖于维数  $n$ )。不妨假设  $s \leq 2$ ; 否则可将  $N_s(H)$  替换为形如  $N_2(H')$  的超平面邻域, 它与  $B(0, 1)$  的交相同。

由于  $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ , 有

$$\mathcal{U}[S] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{U}[V \cap S] = \bigcup_{t \text{ 二进}} \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ |V \cap S| \sim t|V|}} \mathcal{U}[V \cap S], \quad (4.27)$$

其中第一重并中的  $t$  遍历  $|\mathcal{U}||B(0, 1)|^{-1}$  与 1 之间的二进值。这个范围已经足够, 因为若  $|V \cap S| < |\mathcal{U}||B(0, 1)|^{-1}|V| < |\mathcal{U}|$ , 则  $\mathcal{U}[V \cap S] = \emptyset$ 。该范围内的二进  $t$  至多有  $\lesssim \log(2 + |\mathcal{U}|^{-1})$  个。

由于  $\mathcal{U}[S] \neq \emptyset$ , 且  $\mathcal{U}$  中每个元素的直径至少为  $1/100$ , 故  $\text{diam}(S \cap B(0, 1)) \geq 1/100$ , 从而

$$|N_{s/t}(H) \cap B(0, 1)| \sim s/t \sim t^{-1}|S| \quad \text{对所有 } t \in [s, 1]. \quad (4.28)$$

接下来取  $V \in \mathcal{V}$ , 满足  $|V \cap S| \sim t|V|$ 。这意味着  $|(V \cap S)^V| \sim t$ 。于是

$$\begin{aligned} \#\mathcal{U}[V \cap S] &= \#\{U \in \mathcal{U}: U \subset V \cap S\} \\ &= \#\{U \in \mathcal{U}[V]: U \subset V \cap S\} \\ &= \#\{U^V \in \mathcal{U}^V: U^V \subset (V \cap S)^V\} \\ &\leq C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) |(V \cap S)^V| (\#\mathcal{U}[V]) \\ &\lesssim t \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) \right) \left( K \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{V}} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

另一方面, 由引理 4.9,

$$\begin{aligned} \#\{V \in \mathcal{V}: |V \cap S| \sim t|V|\} &\leq \#\{V \in \mathcal{V}: V \subset N_{Kns/t}(H)\} \\ &\lesssim C_{F-SW}(\mathcal{V})|B(0,1) \cap N_{Kns/t}(H)|(\#\mathcal{V}) \\ &\lesssim t^{-1}C_{F-SW}(\mathcal{V})|S|(\#\mathcal{V}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

其中最后一个不等式使用了 (4.28)。

用 (4.29) 与 (4.30) 控制并集 (4.27) 的基数, 得到

$$\begin{aligned} \#\mathcal{U}[S] &\lesssim \sum_{t \text{ 二进}} \left( t^{-1}C_{F-SW}(\mathcal{V})|S|(\#\mathcal{V}) \right) \left( t \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) \right) \left( K \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{V}} \right) \right) \\ &\lesssim K_1 |S|(\#\mathcal{U}), \quad K_1 = \log(2 + |U|^{-1}) K \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} C_{F-SW}(\mathcal{U}^V) \right) \left( C_{F-SW}(\mathcal{V}) \right). \quad \square \end{aligned}$$

下面讨论注 4.3(C) 对 Katz–Tao 凸 Wolff 公理的版本。我们只考虑所涉及的凸集均为管的特殊情形。

**引理 4.12.** 设  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$ 。设  $\mathbb{T}$  为  $\delta$ -管的一个多重集,  $\mathbb{T}_\rho$  为  $\mathbb{T}$  的一个覆盖。则

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \lesssim \left( \sup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\rho}) \right) \left( C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \right). \quad (4.31)$$

证明. 取凸集  $W \subset \mathbb{R}^3$ , 并假设  $\mathbb{T}[W] \neq \emptyset$ 。把  $W$  替换为  $W \cap B(0,1)$ , 再将其放大一个常数倍, 不妨假设  $W$  是尺寸为  $a \times b \times 2$  的棱柱。由于  $\mathbb{T}_\rho$  覆盖  $\mathbb{T}$ , 有

$$\mathbb{T}[W] = \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} (\mathbb{T}[T_\rho])[W] = \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} \mathbb{T}[T_\rho \cap W]. \quad (4.32)$$

注意, 若  $\mathbb{T}[T_\rho \cap W] \neq \emptyset$ , 则  $T_\rho \cap W$  必须包含一条单位线段, 因此  $T_\rho \subset N_{3\rho}(W)$ 。

令  $\tilde{a} = \min(a, \rho)$ 、 $\tilde{b} = \min(b, \rho)$ 。注意

$$|N_{3\rho}(W)| \sim \left( \frac{\rho}{\tilde{a}} \right) \left( \frac{\rho}{\tilde{b}} \right) |W|,$$

从而

$$\#\mathbb{T}_\rho[N_{3\rho}(W)] \leq C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \frac{|N_{3\rho}W|}{|T_\rho|} \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \frac{|W|}{\tilde{a}\tilde{b}}. \quad (4.33)$$

另一方面, 若  $\mathbb{T}[T_\rho \cap W]$  非空, 则  $T_\rho \cap W$  是一个尺寸至多为  $2\tilde{a} \times 2\tilde{b} \times 1$  的凸集, 因此

$$\#\mathbb{T}[T_\rho \cap W] \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}[T_\rho]) \frac{|T_\rho \cap W|}{|T|} \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\rho}) \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{|T|}. \quad (4.34)$$

将 (4.32)、(4.33) 与 (4.34) 结合, 即得 (4.31)。  $\square$

## 5 将管因子分解到扁平棱柱中

本节考察把命题 4.6 应用于一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  时会发生什么。回顾命题 4.6 的输出是一组精化  $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$  与一族凸集  $\mathcal{W}$ 。若  $C_{F-CW}(\mathbb{T}) = 1$ , 则  $\mathcal{W} = \{B(0, 1)\}$ ; 另一方面, 若  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) = 1$ , 则  $\mathcal{W} = \mathbb{T}$ 。若  $C_{KT-CW}(\mathbb{T})$  与  $C_{F-CW}(\mathbb{T})$  都很大, 则  $\mathcal{W}$  由一族凸集组成, 其中每个凸集都与尺寸为  $a \times b \times 1$  的长方棱柱可比较, 这里  $\delta \leq a \leq b \leq 1$ 。本节的核心主题是: 若  $\mathcal{W}$  中的棱柱是扁平的, 即  $a \ll b$ , 则并集  $\bigcup T$  的体积会大于断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  中估计 (1.3) 所预言的大小。精确陈述如下。

**命题 5.1.** 设  $\omega > 0$ ,  $0 < \sigma \leq 2/3$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的。设  $\delta \leq a \leq b \leq 1$ , 并设  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{T}$  的一个  $\delta^{-\eta}$ -平衡覆盖, 由某个  $a \times b \times 2$  棱柱的全等副本组成。

(A) 假设  $\mathcal{W}$  关于 *Frostman* 凸 *Wolff* 公理从下因子分解  $\mathbb{T}$ , 并关于 *Katz-Tao* 凸 *Wolff* 公理从上因子分解  $\mathbb{T}$ , 两者误差均为  $\delta^{-\eta}$ 。再假设  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{T}$  的  $\delta^{-\eta}$ -平衡、 $\delta^{-\eta}$ -近似分割覆盖, 并且对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $\#\mathbb{T}[W] \geq \delta^\eta C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \frac{|W|}{|\mathbb{T}|}$  (例如, 当把命题 4.6 应用于  $\mathbb{T}$  并以  $\mathcal{W}$  为输出时, 该条件成立)。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} \left( \frac{b}{a} \right)^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} \ell (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad (5.1)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ,  $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。

(B) 假设  $\mathcal{W}$  关于 *Frostman* 凸 *Wolff* 公理从上、从下均因子分解  $\mathbb{T}$ , 两者误差都不超过  $\delta^{-\eta}$ 。再假设  $\mathcal{W}$  在尺度  $b$  上满足 *Katz-Tao* 凸 *Wolff* 公理, 具体而言, 对所有  $W \in \mathcal{W}$  都有  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}[N_b(W)]) \leq \delta^{-\eta}$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} \left( \frac{b}{a} \right)^\omega ((\#\mathbb{T})^{1/2} |T|)^\sigma. \quad (5.2)$$

注意, 当  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) = (\#\mathbb{T}) |T|$  时, (5.2) 与 (5.1) 一致; 此时  $C_{F-CW}(\mathbb{T})$  与  $C_{F-SW}(\mathbb{T})$  的大小都约为 1。

在第 9 节中, 我们将用到命题 5.1(A) 的如下轻微推广。

**命题 5.2.** 设  $\omega > 0$ ,  $0 < \sigma \leq 2/3$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $0 < \delta \leq \rho \leq a \leq b \leq 1$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的, 并设  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的一个  $\delta^{-\eta}$ -平衡覆盖。设  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{T}_\rho$  的一个  $\delta^{-\eta}$ -平衡覆盖, 由某个  $a \times b \times 2$  棱柱的全等副本组成。

假设  $\mathbb{T}_\rho$  关于 *Frostman* 薄板 *Wolff* 公理以误差  $\ell'$  从下因子分解  $\mathbb{T}$ 。再假设  $\mathcal{W}$  关于 *Katz-Tao* 凸 *Wolff* 公理从上因子分解  $\mathbb{T}_\rho$ , 并关于 *Frostman* 凸 *Wolff* 公理从下因子分解  $\mathbb{T}_\rho$ , 两者误差均为  $\delta^{-\eta}$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} \left( \frac{b}{a} \right)^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} \ell \ell' (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad (5.3)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ,  $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。

命题 5.1(A) 正是命题 5.2 在  $\rho = \delta$  且  $\mathbb{T}_\rho = \mathbb{T}$  时的特殊情形。

第 5 节的主要目标是证明命题 5.1 与 5.2。第二个目标是引入估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的两个近亲，并证明这三个估计彼此等价。第一个估计在形式上更弱：它是  $\ell$  的大小约为 1 时估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的特殊情形。

定义 5.3. 称断言  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$  成立，如果：

对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\kappa, \eta > 0$ ，使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的，并假设  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega+\varepsilon} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad (5.4)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ 。

第二个估计在形式上更强：它是估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的一个推广，其中  $\delta$ -管被直径为 1 的全等凸集所取代。

定义 5.4. 称断言  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  成立，如果：

对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\kappa, \eta > 0$ ，使得对所有  $0 < a \leq b \leq 1$  下述结论成立。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times 1}$  为  $a^\eta$ -稠密的。则

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \geq \kappa a^\varepsilon b^\omega m^{-1} (\#\mathcal{P}) |P| (m^{-3/2} \ell (\#\mathcal{P}) |P|^{1/2})^{-\sigma} D^{-\sigma}, \quad (5.5)$$

其中

$$m = C_{KT-CW}(\mathcal{P}), \quad \ell = C_{F-SW}(\mathcal{P}), \quad \text{且} \quad D = \max_{P \in \mathcal{P}} \sup_{\rho \in [a, b]} \frac{|P|}{|N_\rho(P)|} (\#\mathcal{P}[N_\rho(P)])^{1/2}. \quad (5.6)$$

注 5.5. 当  $\sigma \in (0, 2/3]$  时，项

$$m^{-1} (\#\mathcal{P}) |P| (m^{-3/2} \ell (\#\mathcal{P}) |P|^{1/2})^{-\sigma} D^{-\sigma}$$

总是不超过 1。事实上，由于  $\#\mathcal{P} \leq m|P|^{-1}$  且  $\sigma \in (0, 2/3]$ ，只需证明  $((\#\mathcal{P})|P|)^{1/2} \ell^{-1} |P|^{1/2} \leq D$ 。这是因为  $\#\mathcal{P} \leq \#\mathcal{P}[N_b(P)] \cdot b^{-4} \leq D^2 b^{-2} a^{-2}$ ，并且  $\ell \geq 1$ 。

注 5.6. 若  $\mathcal{P}$  非空，则在 (5.6) 中取  $\rho = a$  可知  $D = D(\mathcal{P})$  总满足  $D \gtrsim 1$ 。一般而言， $D$  可以大到  $(b/a)^{1/2}$ ：当  $\rho = b$  时，约有  $(b/a)^3$  个本质不同的  $a \times b \times 1$  棱柱可能装入  $b$ -管  $N_b(P)$ 。若发生这种情形，则 (5.6) 右端变为  $\frac{ab}{b^2} (b/a)^{3/2} = (b/a)^{1/2}$ 。不过，在若干重要情形下可以保证  $D$  的大小约为 1。下面列出其中三种。

**情形 1.** 若  $a = b$ ，由于  $\mathcal{P}$  中各棱柱本质不同，有  $\#\mathcal{P}(N_a(P)) \sim 1$ ，从而  $D \sim 1$ 。特别地，这意味着  $\mathcal{F}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{E}(\sigma, \omega)$ 。

**情形 2.** 假设对每个  $P \in \mathcal{P}$ ，都有  $C_{KT-CW}(\mathcal{P}[N_b(P)]) \leq K$ ，其中  $K \geq 1$ 。这表示  $\mathcal{P}$  的 Katz–Tao 凸 Wolff 常数本身可能很大，但若只看包含在某根直径为  $b$  的管中的棱柱族  $\mathcal{P}'$ ，则  $\mathcal{P}'$  的 Katz–Tao 凸 Wolff 常数很小（这正是命题 5.1(B) 的设置）。于是对每个  $\rho \in [a, b]$  和  $P \in \mathcal{P}$ ，有  $\#\mathcal{P}[N_\rho(P)] \lesssim K \frac{\rho \cdot b^{-1}}{a \cdot b^{-1}} = K \frac{\rho}{a}$ ，因此  $D \lesssim K^{1/2}$ 。

**情形 3。** 设  $\mathbb{T}$  是包含于一个  $s \times t \times 2$  棱柱  $W$  内的一族本质不同的  $\delta$ -管, 其中  $0 < s \leq t \leq 2$ 。令  $\mathcal{P} = \phi_W(\mathbb{T})$ 。则  $\mathcal{P}$  中各集合与尺寸为  $a \times b \times 2$  的长方棱柱可比较, 其中  $a = \delta/t$ 、 $b = \delta/s$ 。来估计这一排列对应的  $D = D(\mathcal{P})$ 。对每个  $\rho \in [a, b]$  与  $P \in \mathcal{P}$ ,  $\#\mathcal{P}[N_\rho(P)]$  计算的是  $\mathbb{T}$  中包含于一个尺寸约为  $\delta \times (\delta\rho/a) \times 2$  长方盒中的  $\delta$ -管数。由于  $\mathbb{T}$  中的管本质不同, 这样的盒中至多可容纳  $O((\frac{\delta\rho/a}{\delta})^2) = O(\rho^2/a^2)$  根管。也就是说,  $D \lesssim \sup_{\rho \in [a, b]} (\frac{ab}{\rho b}) (\frac{\rho}{a}) = 1$ 。

## 5.1 若干常用的 Córdoba 型 $L^2$ 论证

本节考察下述论证的若干变体: 为了证明并集  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$  很大, 只需证明  $\|\sum_{P \in \mathcal{P}} \chi_P\|_2^2 = \sum_{P, P' \in \mathbb{T}} |P \cap P'|$  很小, 然后由 Cauchy-Schwarz 不等式推出

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \right| \geq \left( \sum_{P \in \mathcal{P}} |P| \right)^2 / \left\| \sum_{P \in \mathcal{P}} \chi_P \right\|_2^2.$$

Córdoba 在 [6] 中用这一论证证明了  $\mathbb{R}^2$  中的挂谷极大函数猜想, 因此我们称这种论证为 “Córdoba 型  $L^2$  论证”。

### 5.1.1 薄板的体积估计

本节用 Córdoba 型  $L^2$  论证估计薄板并集的体积。精确陈述如下。

**引理 5.7.** 设  $\delta, \lambda > 0$ 。设  $\mathcal{S}$  为一族  $\delta \times 1 \times \dots \times 1$  薄板 (注意: 这些薄板不必本质不同),  $Y$  为  $\mathcal{S}$  上的  $\lambda$ -稠密着色。令  $m = C_{KT-CW}(\mathcal{S})$ 。则

$$\left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}} Y(S) \right| \gtrsim |\log \delta|^{-1} m^{-1} \lambda^2 (\#\mathcal{S}) |\mathcal{S}|. \quad (5.7)$$

证明. 固定  $S \in \mathcal{S}$ 。由引理 4.9 (应用于  $\mathcal{S}$  中各元素的外 John 椭圆), 对每个  $t \in [\delta, 1]$ , 有

$$\#\{S' \in \mathcal{S}: |S \cap S'| \sim t|S|\} \leq \#\{S' \in \mathcal{S}: S' \subset N_{C\delta/t}(S)\} \lesssim m \frac{\delta}{t} |S|^{-1} \sim \frac{m}{t},$$

其中  $C = C(n)$  只依赖于  $n$ 。因此

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi_{Y(S)} \right\|_2^2 &\leq \left\| \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi_S \right\|_2^2 \lesssim \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{\delta \leq t \leq 1 \\ t \text{ dyadic}}} \sum_{\substack{S' \in \mathcal{S} \\ |S \cap S'| \sim t|S|}} t|S| \\ &\lesssim \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{\delta \leq t \leq 1 \\ t \text{ dyadic}}} \left( \frac{m}{t} \right) t|S| \lesssim |\log \delta| m (\#\mathcal{S}) |\mathcal{S}|. \end{aligned} \quad (5.8)$$

令  $E = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} Y(S)$ 。由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\left( \lambda |\mathcal{S}| (\#\mathcal{S}) \right)^2 \leq \left( \int \chi_E \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi_{Y(S)} \right)^2 \leq |E| \left\| \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi_{Y(S)} \right\|_2^2. \quad (5.9)$$

比较 (5.8) 与 (5.9) 即得结论。  $\square$

下面列出引理 5.7 的几个常用场景。

- $(\mathcal{S}, Y)$  为  $\delta^\eta$ -稠密的, 且  $C_{F-CW}(\mathcal{S}) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ 。此时 (5.7) 右端满足  $\gtrsim_\delta \delta^{3\eta}$ 。
- $\mathcal{R}$  是  $\rho \times 2$  长方形  $W$  内的一族  $\delta \times 1$  长方形: 我们把引理 5.7 应用于  $\mathcal{R}^W$ 。
- $\mathbb{T}$  是  $100\delta \times b \times 1$  棱柱  $W$  内的一族  $\delta$ -管: 我们把引理 5.7 应用于  $\mathbb{T}^W$ 。

### 5.1.2 棱柱的切向相交与横截相交

下面的结果说明: 若一族  $a \times b \times 1$  棱柱横截相交, 即在典型相交点处它们的切平面夹角很大, 则这些棱柱的并集会填充其加厚邻域的很大一部分。精确陈述见下面的引理 5.10 与推论 5.13。在陈述之前, 先给出几个定义。

定义 5.8. 设  $W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y(W) \subset W$  为着色, 且  $\delta > 0$ 。若对每个  $x \in Y(W)$  和每个  $r \in [\delta, 1]$  都有

$$|Y(W) \cap B(x, r)| \geq (100 \log(1/\delta))^{-1} |Y(W)| \left( \frac{|B(x, r) \cap W|}{|W|} \right). \quad (5.10)$$

则称着色  $Y(W)$  在尺度  $\geq \delta$  上正则。若  $\delta$  从上下文中显然可知, 我们就省略它, 简称  $Y(W)$  正则。

下一个引理说明, 经过无害的精细化后, 每个着色都有一个正则子着色。这是 [19] 中的引理 2.7; 亦见 [26, Lemma 2.3]。

**引理 5.9.** 设  $W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y(W)$  为一个着色。则存在正则着色  $Y'(W) \subset Y(W)$ , 满足  $|Y'(W)| \geq \frac{1}{2} |Y(W)|$ 。

下面的结果说明: 若一个棱柱  $P_0$  与许多非切向相交于  $P_0$  的棱柱关联, 则这些棱柱的并集会填充  $P_0$  的一个加厚邻域。

**引理 5.10.** 设  $0 < a \leq b \leq c$  且  $\lambda > 0$ 。设  $P_0$  为一个带着色  $Y_0(P_0)$  的  $a \times b \times c$  棱柱。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  为一族棱柱及其着色。假设  $|Y_0(P_0)| \geq \lambda |P_0|$ ; 对每个  $P \in \mathcal{P}$ ,  $|Y(P)| \geq \lambda |P|$ ; 且每个  $Y(P)$  按定义 5.8 都是正则的。

设  $\theta \in [\frac{a}{b}, 1]$ , 并假设

$$\theta \leq \theta_{\min} := \frac{a}{b} + \inf_{x \in Y_0(P_0)} \sup_{P \in \mathcal{P}_Y(x)} \angle(\Pi(P_0), \Pi(P)).$$

则

$$\left| N_{b\theta}(P_0) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \gtrsim_a \lambda^4 |N_{b\theta}(P_0)|. \quad (5.11)$$

注 5.11. (5.14) 中的指数  $\lambda^4$  并不重要; 在我们对引理 5.10 的应用中, 改成  $\lambda^{100}$  同样可以。

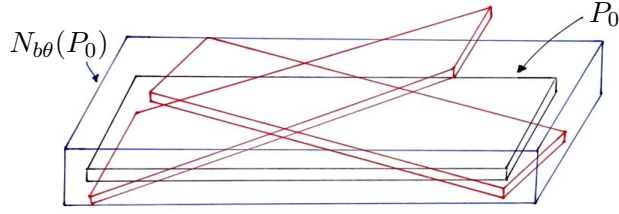


图 6: 引理 5.10 的几何情形。对每个  $x \in Y_0(P_0)$ ,  $\mathcal{P}$  中都有一个棱柱 (红色) 以至少  $\theta_{\min}$  的角度在  $x$  处与  $P_0$  相交。为使图形清楚, 只画出了其中两个棱柱。这些红色棱柱的并集填充了以  $P_0$  中各点为中心的每个  $b$ -球的很大一部分。

证明. 论证在精神上与 [27] 中 Wolff 的发刷论证相似。通过二进鸽巢, 可以选取  $\theta_1 \in [\theta, 1]$  和集合  $Y'_0(P_0) \subset Y_0(P_0)$ , 满足  $|Y'_0(P_0)| \gtrsim_a |Y_0(P_0)|$ , 并且

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_Y(y)} \angle(\Pi(P_0), \Pi(P)) \sim \theta_1 \quad \text{对每个 } y \in Y'_0(P_0).$$

应用引理 5.9 (并把  $Y'_0(P_0)$  再精化一个因子 2), 不妨假设  $Y'_0(P_0)$  是正则的。

令  $b' = b \frac{\theta}{\theta_1}$ ; 注意  $a \leq b' \leq b$ 。把  $P_0$  分成尺寸为  $a \times b' \times b'$  的子棱柱; 其中有  $\gtrsim \lambda \frac{|P|}{a(b')^2}$  个子棱柱与  $Y(P)$  相交。因此, 为了得到 (5.14), 只需证明对每个  $x \in Y'(P_0)$ ,

$$\left| N_{b\theta}(P_0 \cap B(x, b')) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \gtrsim_a \lambda^3 (b\theta) (b')^2. \quad (5.12)$$

固定  $x \in Y'(P_0)$ 。我们的目标是证明该  $x$  下的 (5.12)。令  $E = Y'(P_0) \cap B(x, b')$ 。由于  $Y'(P_0)$  正则,  $|E| \gtrsim_a \lambda a (b')^2$ 。对每个  $y \in E$ , 取  $P_y \in \mathcal{P}_Y(y)$ , 满足  $\angle(\Pi(P_0), \Pi(P)) \sim \theta_1$ 。

集合  $B(x, b') \cap \bigcup_{y \in E} P_y$  包含于一个尺寸与  $b\theta \times b' \times b'$  可比较的棱柱中, 该棱柱与  $a \times b' \times b'$  棱柱  $B(x, b') \cap P$  同心; 记这一  $b\theta \times b' \times b'$  棱柱为  $Q$ 。则  $\phi_Q(B(x, b') \cap P)$  与尺寸为  $\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1$  的棱柱可比较。为方便记号, 选择坐标使该棱柱为  $\tilde{P} = [0, \frac{a}{b\theta}] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 。

对每个  $y \in E$ ,  $\phi_Q(B(x, b') \cap P_y)$  与一个  $\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1$  棱柱可比较, 而且每个这样的棱柱都以  $\sim 1$  的角度与  $(z_2, z_3)$ -平面相交; 也就是说, 该棱柱法向量  $v_y$  在  $(z_2, z_3)$  平面上的投影长度满足  $\gtrsim 1$ 。由于每个  $P_y \in \mathcal{P}$  的着色都是正则的,  $\phi_Q(Y(P_y) \cap B(x, b'))$  是棱柱  $\phi_Q(P_y \cap B(x, b'))$  的一个密度为  $\gtrsim_a \lambda$  的子集。

经过鸽巢, 可以选取  $E' \subset E$ , 满足  $|E'| \gtrsim |E|$ , 使得对每个  $y \in E'$ ,  $\phi_Q(P_y \cap B(x, b'))$  都与一个  $\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1$  棱柱可比较, 其法向量  $v_y$  与某个固定单位向量  $v$  的夹角不超过  $1/100$ , 且  $v$  在  $(z_2, z_3)$  平面上的投影长度满足  $\gtrsim 1$ 。令  $v'$  为  $v$  在  $(z_2, z_3)$  平面上的投影。

由 Fubini 定理, 可以找到沿  $v'$  方向的线段  $L \subset [0, \frac{a}{b\theta}] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , 满足  $|L \cap \phi_Q(E')| \geq |\phi_Q(E')|$ ; 这里左侧  $|\cdot|$  表示一维 Lebesgue 测度, 右侧表示三维 Lebesgue 测度。取  $L \cap \phi_Q(E')$  的一个  $\frac{a}{b\theta}$ -分离子集  $y_1, \dots, y_N$ , 其中  $N \gtrsim \frac{b\theta}{a} |L \cap \phi_Q(E')| \gtrsim_a \lambda \frac{b\theta}{a}$ , 并令

$$\mathcal{S} = \{\phi_Q(P_{y_i} \cap B(x, b')) : i = 1, \dots, N\}.$$

$\mathcal{S}$  是  $\mathbb{R}^3$  中的一族凸集, 其中每个集合都与一个  $\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1$  薄板可比较。每个  $S \in \mathcal{S}$  都有一个  $\gtrsim_a \lambda$ -稠密着色 (即集合  $\phi_Q(Y(P_{y_i}) \cap B(x, b'))$ ), 因此  $(\mathcal{S}, Y)_{\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1}$  特别是  $\gtrsim_a \lambda$ -稠密的。

我们声称  $C_{KT-CW}(\mathcal{S}) \lesssim 1$ 。为验证这一点, 设  $W \subset \mathbb{R}^3$  为凸集, 并假设  $\#\{S \in \mathcal{S}: S \subset W\} = M$ 。需要证明

$$M \lesssim |W||S|^{-1}. \quad (5.13)$$

若  $M = 0$  无需证明; 若  $M = 1$ , 显然  $|W| \geq |S|$ 。设  $M \geq 2$ 。由于  $W \cap L$  含有  $L$  上至少  $M$  个彼此  $\frac{a}{b\theta}$ -分离的点,  $|W \cap L| \geq (M-1)\frac{a}{b\theta} \geq \frac{M}{2b\theta} \gtrsim M|S|$ 。另一方面, 因  $\mathcal{S}[W]$  非空,  $W$  包含某个  $\frac{a}{b\theta} \times 1 \times 1$  棱柱  $S \in \mathcal{S}[W]$ , 其法向方向与  $v$  的夹角至多为  $1/50$  ( $v$  在  $(z_2, z_3)$  平面上的投影就是  $v'$ , 即  $L$  的方向)。由于  $W$  为凸集, 它包含  $S \cup (W \cap L)$  的凸包, 而该凸包的三维体积满足  $\gtrsim |W \cap L| \gtrsim M|S|$ 。故  $|W| \gtrsim M|S|$ , 即得 (5.13)。

应用引理 5.7 (薄板的 Córdoba 型  $L^2$  论证), 得到

$$\left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}} Y(S) \right| \gtrsim_a \lambda^2(\#\mathcal{S})|S| \gtrsim_a \lambda^2 \left( \lambda \frac{b\theta}{a} \right) \left( \frac{a}{b\theta} \right) = \lambda^3.$$

为结束证明, 注意

$$\begin{aligned} \left| N_{b\theta}(P_0 \cap B(x, b')) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| &\geq \left| N_{b\theta}(P_0 \cap B(x, b')) \cap \bigcup_{y \in E'} Y(P_y) \right| \\ &\geq (b\theta)(b')^2 \left| \phi_Q \left( B(x, b') \cap \bigcup_{y \in E'} Y(P_y) \right) \right| \\ &\geq (b\theta)(b')^2 \left| \phi_Q \left( B(x, b') \cap \bigcup_{i=1}^N Y(P_{y_i}) \right) \right| \\ &\geq (b\theta)(b')^2 \left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}} Y(S) \right| \gtrsim_a \lambda^3 (b\theta)(b')^2. \quad \square \end{aligned}$$

这就证明了所需的 (5.12)。

实际应用中, 我们经常在  $\mathcal{P}$  中每个棱柱  $P_0$  都满足引理 5.10 假设的情形使用该引理。下面的定义将这一点精确化。

定义 5.12. 设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  为一族棱柱及其着色, 并取  $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P)$ 。定义

$$\theta(x) = \frac{a}{b} + \sup_{P, P' \in \mathcal{P}_Y(x)} \angle(\Pi(P), \Pi(P')),$$

其中  $\mathcal{P}_Y(x) = \{P \in \mathcal{P}: x \in Y(P)\}$ 。再定义

$$\theta_{\min} = \inf \theta(x),$$

其中下确界遍历所有  $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P)$ 。注意  $\theta_{\min}$  依赖于二元组  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$ ;  $\mathcal{P}$  与  $Y$  的选择将由上下文明确给出。

逐个考虑  $P_0 \in \mathcal{P}$  后, 引理 5.10 立即给出如下推论。

**推论 5.13.** 设  $0 < a \leq b \leq c$ ,  $\lambda > 0$ 。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  为一族棱柱及其着色。假设每个  $Y(P)$  按定义 5.8 都是正则的, 并满足  $|Y(P)| \geq \lambda|P|$ 。则对每个  $P_0 \in \mathcal{P}$ , 有

$$\left| N_{b\theta_{\min}}(P_0) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \gtrsim_a \lambda^4 |N_{b\theta_{\min}}(P)|. \quad (5.14)$$

## 5.2 断言 $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{E}$ 与 $\tilde{\mathcal{E}}$ 等价

如注 5.6 的情形 1 所述, 我们已有  $\mathcal{F}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{E}(\sigma, \omega) \implies \tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$ 。本节证明反向蕴含。更精确地, 有如下命题。

**命题 5.14.** 设  $0 < \sigma \leq 2/3$ ,  $\omega > 0$ 。则  $\mathcal{F}(\sigma, \omega) \iff \mathcal{E}(\sigma, \omega) \iff \tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$ 。

第 5.2 节的目标是证明命题 5.14。我们先给出若干描述长方棱柱排列结构的引理。回顾定义 5.12 中的量  $\theta_{\min}$ 。当  $\theta_{\min} \sim 1$  时, 典型的一对相交棱柱横截相交; 由推论 5.13, 这意味着每个棱柱都可替换为一个与  $a$ -管可比较的加厚邻域。下一个引理分析  $\theta_{\min}$  很小时的情形, 即考虑一族  $a \times b \times 1$  棱柱  $\mathcal{P}$ , 它们以切向方式相交, 也就是说在典型相交点处其切平面的夹角很小。

非正式地, 论证如下。先描述三个将反复应用的操作。注意, 这些不是第 2.2 节中提到的操作; 后者将在第 7、8 节中定义。

由于一个棱柱的切平面沿整个棱柱保持不变, 可将棱柱族分割为较小的子族  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N$ , 使得对每个指标  $i$ ,  $\mathcal{P}_i$  中每个棱柱切平面的法向量都与某个固定单位向量  $v_i$  成小角度。若  $\mathcal{P}_i$  与  $\mathcal{P}_j$  是两个这样的子族, 则相应集合  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_i} P$  与  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_j} P$  基本不相交。可以用一族法向量为  $v_i$  的薄板覆盖每个  $\mathcal{P}_i$  中的棱柱, 然后在每个薄板内重标度并继续这一过程。这是操作 #1。

接着, 把命题 4.8 (关于 Frostman 薄板 Wolff 公理的因子分解) 应用于棱柱族, 将其进一步分成若干子族, 使每个子族都以较小误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理。这是操作 #2。

最后, 应用引理 5.9 (每个着色都有正则子着色)。这是操作 #3。

反复应用操作 1、2、3, 直到棱柱族  $\mathcal{P}$  被  $\mathbb{R}^3$  中一族凸集  $\mathcal{W}$  覆盖, 并且每个  $\mathcal{P}^W$  都在  $\theta_{\min}$  大小约为 1 时满足推论 5.13 的假设, 同时  $\mathcal{P}^W$  以约为 1 的误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理。精确陈述如下。

**引理 5.15.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta, c > 0$ , 使得对所有  $0 < a \leq b \leq 1$  下述结论成立。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times 1}$  为  $a^\eta$ -稠密的。则存在精化  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times 1}$ , 满足  $\sum_{P' \in \mathcal{P}'} |Y'(P')| \gtrsim_a a^\varepsilon \sum_{P \in \mathcal{P}} |P|$ , 以及由全等凸集组成的  $\mathcal{P}'$  的覆盖  $\mathcal{W}$ , 使得:

(A) 着色  $Y'$  按定义 5.8 是正则的。

(B)  $\mathcal{W}$  是  $\mathcal{P}'$  的一个  $\approx_a 1$ -平衡覆盖, 并关于 Frostman 薄板 Wolff 公理以误差  $a^{-\varepsilon}$  从下因子分解  $\mathcal{P}'$ 。

(C)  $\bigcup_{W \in \mathcal{W}} \mathcal{P}^W$  中所有凸集的尺寸在乘法因子 2 内相同, 也就是说, 经适当刚性变换后, 每一个都与某个公共凸集  $\tilde{P}$  可比较 (见下面的注 5.16)。

(D) 对每个  $W \in \mathcal{W}$ , 集合族  $\mathcal{P}^W$  及其着色按定义 5.12 满足  $\theta_{\min} \geq a^\varepsilon$ 。

(E) 当  $W \in \mathcal{W}$  变化时, 各集合  $\bigcup_{P' \in \mathcal{P}'[W]} Y'(P')$  两两不交。

注 5.16. 注意, 即使  $\mathcal{P}$  (以及  $\mathcal{W}$ ) 中的棱柱各自具有相同尺寸,  $\mathcal{P}^W$  中的棱柱仍可能具有不同尺寸; 图 7 给出了一个例子。结论 (C) (通过鸽巢得到) 保证这种情形不会发生。

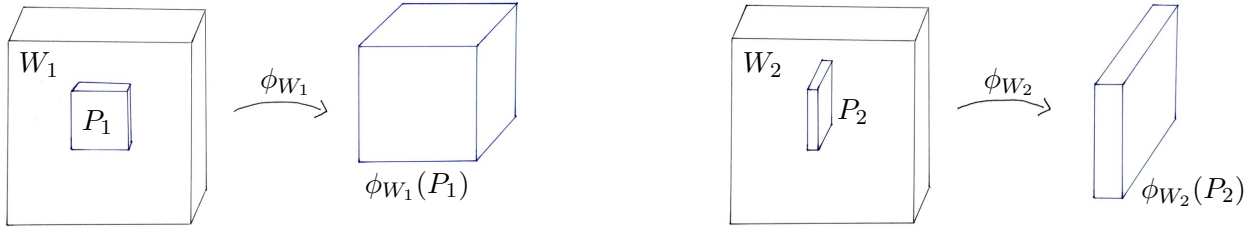


图 7: 一个例子: 凸集  $P_1$  与  $P_2$  全等,  $U_1$  与  $U_2$  全等, 但  $\phi_{U_1}(P_1)$  与  $\phi_{U_2}(P_2)$  并不全等。

证明. 证明的主要思想已在上面说明。简言之, 我们依次应用操作 1、2、3, 并反复迭代, 直到引理 5.15 的结论 (A)、(B)、(D)、(E) 都成立。每次迭代都使每个幸存凸集的体积至少增大一个因子  $a^{-\varepsilon}$ 。另一方面, 每个凸集初始体积为  $ab \geq a^2$ , 且每一步中所有凸集都包含在单位球内, 所以体积至多为  $O(1)$ 。因此上述迭代过程至多经过  $2/\varepsilon$  步即停止。若把  $\eta > 0$  取得足够小 (取决于  $\varepsilon$ ), 则最终精化满足  $\sum_{P' \in \mathcal{P}'} |Y'(P')| \gtrsim a^\varepsilon \sum_{P \in \mathcal{P}} |P|$ 。最后, 对  $\mathcal{P}'$  作二进鸽巢, 选出满足结论 (C) 的精化。□

现在可以证明命题 5.14。思路如下。给定棱柱族  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times 1}$ , 先用引理 5.15 找到  $\mathcal{P}$  的一个精化, 并用凸集族  $\mathcal{W}$  覆盖它; 然后对每个  $\mathcal{P}^W$  应用推论 5.13, 得到与  $\mathcal{P}^W$  相关联的一族  $\tilde{b}$ -管, 其中  $\tilde{b} \geq b$ 。这族  $\tilde{b}$ -管以  $\lesssim 1$  的误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理, 并以某个之后要分析的误差  $\tilde{m}$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。随后对这族  $\tilde{b}$ -管应用估计  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$ , 再撤销变换  $\phi_W$ 。把所有  $W \in \mathcal{W}$  的贡献相加, 就得到  $|\bigcup Y(P)|$  的估计, 而且  $\tilde{m}$  越大, 该估计越强。因此需要估计  $\tilde{m}$  的大小; 这一量与 (5.6) 中的  $D$  密切相关。下面给出细节。

命题 5.14 的证明. 只需证明  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega) \implies \mathcal{F}(\sigma, \omega)$ 。固定  $0 < \sigma \leq 2/3$ ,  $\omega > 0$ , 并假设  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$  成立。固定  $\varepsilon > 0$ 。于是存在  $\eta_0 > 0$ , 使得对所有  $\delta^{\eta_0}$ -稠密且满足  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta_0}$  的  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 体积估计 (5.4) 成立。

令  $\kappa, \eta > 0$  为下文待定的量。取  $0 < a \leq b \leq 1$ , 并设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times 1}$  为  $a^\eta$ -稠密的。目标是证明

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \geq \kappa a^\varepsilon b^\omega m^{-1} (\#\mathcal{P}) |P| (m^{-3/2} \ell(\#\mathcal{P}) |P|^{1/2})^{-\sigma} D^{-\sigma}, \quad (5.15)$$

其中  $m, \ell, D$  如 (5.6) 所定义。

**步骤 1.** 令  $\eta_1$  为稍后确定的小量 (我们将取  $\eta_1$  远小于  $\eta_0$ , 再取  $\eta$  远小于  $\eta_1$ )。把  $\eta > 0$  取得足够小, 使得可将引理 5.15 应用于  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times 1}$ , 其中用  $\eta_1/4$  替代  $\varepsilon$ 。记该引理的输出为  $(\mathcal{P}_1, Y_1)_{a \times b \times 1}$  与  $\mathcal{W}$ 。由引理 5.15 的结论 (B), 对每个  $W \in \mathcal{W}_1$  有  $C_{F-SW}(\mathcal{P}_1^W) \leq a^{-\eta_1/4}$ 。由结论 (E),

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \geq \sum_{W \in \mathcal{W}} \left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}_1[W]} Y_1(P) \right|. \quad (5.16)$$

由结论 (C), 存在  $\tilde{a} \leq \tilde{b} \leq 1$ , 且  $\tilde{b} \geq b$ , 使得对每个  $W \in \mathcal{W}$  与  $P^W \in \mathcal{P}_1^W$ ,  $P^W$  都与  $\tilde{a} \times \tilde{b} \times 1$  棱柱可比较。结论 (A)、(D) 说明, 对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $(\mathcal{P}_1^W, Y_1^W)_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times 1}$  满足推论 5.13 的假设, 因此对每个  $P^W \in \mathcal{P}_1^W$ ,

$$\left| N_{\tilde{b}}(P^W) \cap \bigcup_{P'^W \in \mathcal{P}_1^W} Y_1^W(P'^W) \right| \gtrsim a^{\eta_1} |N_{\tilde{b}}(P^W)|. \quad (5.17)$$

换言之, 对每个  $P^W \in \mathcal{P}_1^W$ ,  $N_{\tilde{b}}(P^W)$  与一根  $\tilde{b}$ -管可比较, 而这根  $\tilde{b}$ -管与着色并集  $\bigcup_{P'^W \in \mathcal{P}_1^W} Y_1^W(P'^W)$  几乎充分相交。图 6 展示了这种情形。

**步骤 2.** 如上所述, 每个  $N_{\tilde{b}}(P^W)$  都与  $\tilde{b}$ -管可比较。令  $\mathbb{T}_W$  为  $\{N_{\tilde{b}}(P^W) : P^W \in \mathcal{P}_1^W\}$  的一个极大的本质不同子集。对每个  $T \in \mathbb{T}_W$ , 定义着色

$$Y(T) = T \cap \bigcup_{P^W \in \mathcal{P}_1^W} Y_1^W(P^W).$$

于是 (5.17) 说明  $(\mathbb{T}_W, Y)_{\tilde{b}}$  为  $\gtrsim a^{\eta_1}$ -稠密的。通过鸽巢并精化  $\mathcal{W}$  与  $\mathbb{T}_W$  (这也诱导  $\mathcal{P}_1^W$  的精化), 可确保对每个  $T \in \mathbb{T}_W$ 、 $W \in \mathcal{W}$ ,  $\#\mathcal{P}_1^W[T]$  大小基本相同 (相差至多因子 2)。仍用  $\mathcal{W}, \mathbb{T}_W, \mathcal{P}_1^W$  表示这些精化后的集合。

此时  $\mathbb{T}_W$  是  $\mathcal{P}_1^W$  的平衡覆盖, 并且仍有  $C_{F-SW}(\mathcal{P}_1^W) \lesssim_a a^{-2\eta_1}$ 。由于  $\mathbb{T}_W$  是平衡覆盖, 由注 4.3(A) (即 Frostman Wolff 常数向上继承), 有  $\tilde{\ell} := \max_{W \in \mathcal{W}} C_{F-SW}(\mathbb{T}_W) \lesssim_a a^{-2\eta_1}$ 。最后定义  $\tilde{m} := \max_{W \in \mathcal{W}} C_{KT-CW}(\mathbb{T}_W)$ 。

**步骤 3.** 此时我们已用凸集族  $\mathcal{W}$  覆盖棱柱族  $\mathcal{P}_1$ 。对每个重标度集合  $\mathcal{P}_1^W$ , 已找到一族着色几乎充分的管  $\mathbb{T}_W$ 。这些对象的体积关系为

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}_1[W]} Y_1(P) \right| \sim |W| \left| \bigcup_{P^W \in \mathcal{P}_1^W} Y_1^W(P^W) \right| \geq |W| \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_W} Y(T) \right|. \quad (5.18)$$

下面估计  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}_W} Y(T)$  的体积。先考虑  $\tilde{b} \leq a^{\varepsilon/5}$ 。此时  $(\mathbb{T}_W, Y)_{\tilde{b}}$  为  $\gtrsim \tilde{b}^{5\eta_1/\varepsilon}$ -稠密的, 并且  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_W) \lesssim_a \tilde{b}^{-10\eta_1/\varepsilon}$ 。若根据  $\eta_0$  与  $\varepsilon$  把  $\eta_1$  取得足够小 (例如  $\eta_1 = \varepsilon\eta_0/20$  即可), 则可将  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega)$  中的  $\varepsilon$  换成  $\varepsilon/2$  并应用, 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_W} Y(T) \right| &\gtrsim \tilde{b}^{\omega + \varepsilon/2} \tilde{m}^{-1} (\#\mathbb{T}_W) |T| \left( \tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell} (\#\mathbb{T}_W) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_a a^{\varepsilon/2 + 2\eta_1\sigma} \tilde{b}^{\omega} \tilde{m}^{-1} (\#\mathbb{T}_W) |T| \left( \tilde{m}^{-3/2} (\#\mathbb{T}_W) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

另一方面, 若  $\tilde{b} \geq a^{\varepsilon/5}$ , 则对任意  $T \in \mathbb{T}_W$ ,

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_W} Y(T) \right| \geq |Y(T)| \gtrsim a^{\eta} \tilde{b}^2 \geq a^{\varepsilon/2}, \quad (5.20)$$

这比 (5.19) 更强, 因此同样得到该估计。

**步骤 4.** 我们已对每个  $W \in \mathcal{W}$  估计了  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}_W} Y(T)$  的体积。接下来合并这些估计, 以控制  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P)$  的体积。

$\mathcal{W}$  中每个棱柱  $W$  的尺寸在因子 2 内相同, 记为  $s \times t \times 1$ 。于是对每个  $W \in \mathcal{W}$  和  $T \in \mathbb{T}_W$ ,  $\phi_W^{-1}(T)$  与尺寸为  $s\tilde{b} \times t\tilde{b} \times 1$  的长方棱柱可比较。

令  $\hat{\mathcal{P}}_W = \{\phi_W^{-1}(T) : T \in \mathbb{T}_W\}$ 。也就是说,  $\hat{\mathcal{P}}_W$  是一族包含在  $W$  内的  $s\tilde{b} \times t\tilde{b} \times 1$  棱柱;  $|T| \sim |\hat{P}|/|W|$ , 且  $\#\hat{\mathcal{P}}_W = \#\mathbb{T}_W$ 。对每个  $W \in \mathcal{W}$  与  $\hat{P} = \phi_W^{-1}(T) \in \hat{\mathcal{P}}_W$ , 定义自然着色  $\hat{Y}(\hat{P}) = \phi_W^{-1}(Y(T))$ 。(5.16) 允许我们把每个  $W \in \mathcal{W}$  上的 (重标度) 体积估计 (5.18) 与 (5.19) 合并。定义  $\hat{\mathcal{P}} = \bigsqcup \hat{\mathcal{P}}_W$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| &\gtrsim_a |W| \sum_{W \in \mathcal{W}} \left[ a^{\varepsilon/2 + \eta_1 \sigma} b^{\omega} \tilde{m}^{-1} (\#\hat{\mathcal{P}}_W) \frac{|\hat{P}|}{|W|} \left( \tilde{m}^{-3/2} (\#\hat{\mathcal{P}}_W) \left( \frac{|\hat{P}|}{|W|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma} \right]. \\ &\approx_a a^{\varepsilon/2 + \eta_1 \sigma} b^{\omega} \tilde{m}^{-1} (\#\hat{\mathcal{P}}) |\hat{P}| \left( \tilde{m}^{-3/2} \frac{\#\hat{\mathcal{P}}}{\#\mathcal{W}} \left( \frac{|\hat{P}|}{|W|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

**步骤 5.** 为了理解 (5.21) 的右端, 必须估计  $\tilde{m}$ 。回顾步骤 2 中的鸽巢保证: 对每个  $T \in \mathbb{T}_W$ 、 $W \in \mathcal{W}$ ,  $\#\mathcal{P}_1^W[T]$  基本相同。因此每个  $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$  满足  $\#\mathcal{P}_1[\hat{P}] \approx_a \frac{\#\mathcal{P}_1}{\#\hat{\mathcal{P}}}$ , 从而

$$\tilde{m} \lesssim_a m \frac{|\hat{P}|}{|P|} \frac{\#\hat{\mathcal{P}}}{\#\mathcal{P}_1}. \quad (5.22)$$

于是可如下估计 (5.21) 的右端:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| &\gtrsim_a a^{\varepsilon/2 + \eta_1 \sigma} b^{\omega} m^{-1} (\#\mathcal{P}_1) |P| \left( m^{-3/2} \left( \frac{|P|}{|\hat{P}|} \frac{\#\mathcal{P}_1}{\#\hat{\mathcal{P}}} \right)^{3/2} \frac{\#\hat{\mathcal{P}}}{\#\mathcal{W}} \left( \frac{|\hat{P}|}{|W|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_a a^{\varepsilon/2 + 3\eta_1} b^{\omega} m^{-1} (\#\mathcal{P}) |P| \left( m^{-3/2} (\#\mathcal{P}) |P|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\quad \cdot \left[ (\#\mathcal{W}) |W|^{1/2} \right]^{\sigma} \left[ \frac{|P|}{|\hat{P}|} \left( \frac{\#\mathcal{P}}{\#\hat{\mathcal{P}}} \right)^{1/2} \right]^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

上面的计算使用了  $\#\mathcal{P}_1 \gtrsim_a \delta^{-\eta_1} (\#\mathcal{P})$ 。

**步骤 6.** 比较 (5.23) 与 (5.15) 的右端。还需分析 (5.23) 右端最后两个因子。先处理倒数第二个。由于  $\mathcal{W}$  中各集合是直径  $\sim 1$  的凸集, 每个  $W \in \mathcal{W}$  都包含在一个体积为  $O(|W|^{1/2})$  的薄板中。因此

$$\#\mathcal{P}_1[W] \lesssim C_{F-SW}(\mathcal{P}) |W|^{1/2} (\#\mathcal{P}).$$

又因为  $\#\mathcal{P}_1[W] \approx_a \frac{\#\mathcal{P}_1}{\#\mathcal{W}} \gtrsim_a a^{\eta_1} \frac{\#\mathcal{P}}{\#\mathcal{W}}$ , 所以  $(\#\mathcal{W}) |W|^{1/2} \gtrsim_a a^{\eta_1} C_{F-SW}(\mathcal{P})^{-1} = a^{\eta_1} \ell^{-1}$ 。

**步骤 7.** 下面处理 (5.23) 右端的最后一个因子。回顾  $\mathcal{P}$  是一族  $a \times b \times 1$  棱柱，而  $\hat{\mathcal{P}}$  中各棱柱具有相同但未知的尺寸  $\tilde{s}\tilde{b} \times \tilde{t}\tilde{b} \times 1$ 。把这些尺寸记为  $a' \times b' \times 1$ ，其中  $a \leq a' \leq b'$  且  $b' \geq b$ 。由 (5.23)，只要证明

$$\frac{|P|}{|\hat{P}|} \left( \frac{\#\mathcal{P}}{\#\hat{\mathcal{P}}} \right)^{1/2} \lesssim D = \max_{P \in \mathcal{P}} \sup_{\rho \in [a, b]} \frac{|P|}{|N_\rho(P)|} (\#\mathcal{P}[N_\rho(P)])^{1/2}. \quad (5.24)$$

即可得到所需估计 (5.15)。

固定  $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ 。令  $\mathcal{P}^\dagger$  为包含在  $\hat{P}$  内的一族极大本质不同的  $\min(a', b) \times b \times 1$  棱柱，使每个  $P \in \mathcal{P}[\hat{P}]$  至少包含在某个  $P^\dagger \in \mathcal{P}^\dagger$  中。我们声称

$$\#\mathcal{P}^\dagger \sim (|\hat{P}|/|P^\dagger|)^2. \quad (5.25)$$

事实上，当  $a' \leq b$  时，(5.25) 右端为  $(b'/b)^2$ ，其计数来自一个  $b' \times 1$  长方形中可装入约  $(b'/b)^2$  个本质不同的  $b \times 1$  长方形。当  $a' \geq b$  时，右端为  $(a'b'/b^2)^2$ ；这是因为一个  $a' \times b' \times 1$  棱柱中可装入约  $(b'/a')^2$  根本质不同的  $a' \times a' \times 1$  管，而每根这样的管又可装入约  $(a'/b)^4$  根本质不同的  $b \times b \times 1$  管。

由  $D$  的定义， $D \geq \frac{|P|}{|P^\dagger|} (\#\mathcal{P}[P^\dagger])^{1/2}$ ，即  $\#\mathcal{P}[P^\dagger] \leq (D \frac{|P^\dagger|}{|P|})^2$ 。因此由 (5.25)，

$$\#\mathcal{P}[\hat{P}] \lesssim \left( \frac{|\hat{P}|}{|P^\dagger|} \right)^2 \#\mathcal{P}[P^\dagger] \lesssim \left( \frac{|\hat{P}|}{|P^\dagger|} \right)^2 \left( D \frac{|P^\dagger|}{|P|} \right)^2,$$

这正是 (5.24)。  $\square$

### 5.3 命题 5.1 的证明：经由扁平盒因子分解的管

有了命题 5.14，现在可以证明命题 5.1。固定  $\omega > 0$ ， $0 < \sigma \leq 2/3$ ，并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立（因此由命题 5.14， $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  也成立）。令  $\kappa, \eta > 0$  为下文指定的小量。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的， $\delta \leq a \leq b \leq 1$ ，且  $\mathcal{W}$  是命题 5.1 中所述的一族与  $a \times b \times 2$  棱柱  $W_0$  全等的副本。

**步骤 1.** 经过二进鸽巢，可找到  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的精华  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ ，满足  $\sum_{T \in \mathbb{T}_1} |Y_1(T)| \gtrsim_\delta \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|$ ，以及子集  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}$ ，使得对每个  $W \in \mathcal{W}_1$  和每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[W]} Y_1(T)$ ，

$$\left| B(x, a) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \sim \lambda |B(x, a)|, \quad \text{其中 } \lambda \geq |W|^{-1} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[W]} Y_1(T) \right|, \quad (5.26)$$

其中“密度” $\lambda = \lambda(W)$  对所有  $W \in \mathcal{W}$  都相同（至多相差因子 2）。换言之，(5.26) 表示：若在尺度  $a$  上模糊着色  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[W]} Y_1(T)$ （例如与  $B(0, a)$  的示性函数作卷积），则着色中的每一点密度都约为  $\lambda$ 。

进一步鸽巢后，可保证每个  $(\mathbb{T}_1[W], Y_1)_\delta$  ( $W \in \mathcal{W}_1$ ) 都是  $\approx_\delta \delta^{O(\eta)}$ -稠密的； $\mathcal{W}_1$  是  $\mathbb{T}_1$  的  $\approx_\delta \delta^{-O(\eta)}$ -平衡覆盖；每个  $\mathbb{T}_1^W$  以  $\lesssim_\delta \delta^{-O(\eta)}$  的误差满足 Frostman 凸 Wolff 公理。仍用  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  与  $\mathcal{W}_1$  表示鸽巢后的输出。

**步骤 2.** 固定  $W \in \mathcal{W}_1$ 。则  $(\mathbb{T}_1^W, Y_1^W)_{\delta/b \times \delta/a \times 1}$  是一族凸集，每个都与  $\delta/b \times \delta/a \times 1$  棱柱可比较，并带有  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密着色。先考虑  $b \geq \delta^{1-\varepsilon/100}$ ，于是  $\delta/b \leq \delta^{\varepsilon/100}$ 。此时该着色为  $(\delta/b)^{O(\eta)/\varepsilon}$ -稠密的。

若把  $\eta$  取得足够小, 就可将估计  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  中的  $\varepsilon$  换成  $\varepsilon/2$  并应用 (由命题 5.14,  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  已成立), 得到

$$\left| \bigcup_{T^W \in \mathbb{T}_1^W} Y_1^W(T^W) \right| \geq \kappa_\varepsilon \left( \frac{\delta}{b} \right)^{\varepsilon/2} \left( \frac{\delta}{a} \right)^\omega m_W^{-1} (\#\mathbb{T}^W) |T^W| \left( m_W^{-3/2} \ell_W (\#\mathbb{T}^W) |T^W|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \quad (5.27)$$

其中  $m_W = C_{KT-CW}(\mathbb{T}^W)$ , 而  $\ell_W = C_{F-SW}(\mathbb{T}^W) \leq C_{F-CW}(\mathbb{T}^W) \lesssim_\delta \delta^{-O(\eta)}$ 。还要回顾  $|T^W| \sim |T|/|W|$ 。估计  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  还含有 (5.6) 中的附加项  $D$ , 但正如注 5.6 的情形 3 所讨论的, 这里  $D \lesssim 1$ 。

由于  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^W) \lesssim_\delta \delta^{-O(\eta)}$ , 有  $m_W \lesssim_\delta \delta^{-O(\eta)} |T^W| (\#\mathbb{T}^W)$ , 所以 (5.27) 给出对密度  $\lambda$  (定义见 (5.26)) 的估计:

$$\lambda \geq \left| \bigcup_{T^W \in \mathbb{T}^W} Y^W(T^W) \right| \gtrsim_\delta \kappa_\varepsilon \left( \frac{\delta}{b} \right)^{\varepsilon/2} \delta^{O(\eta)} \left( \frac{\delta}{a} \right)^\omega \left( (\#\mathbb{T}^W)^{1/2} |T^W| \right)^\sigma. \quad (5.28)$$

目前 (5.28) 只在  $b \geq \delta^{1-\varepsilon/100}$  时得到。若  $b < \delta^{1-\varepsilon/100}$ , 则每个  $T^W \in \mathbb{T}_1^W$  的尺寸与某个  $d_1 \times d_2 \times 1$  可比较, 其中  $1 \geq d_2 \geq d_1 \geq \delta^{\varepsilon/100}$ 。这是因为

$$\lambda \geq |Y^W(T^W)| \geq \delta^{O(\eta)} |T^W| \geq \delta^{\varepsilon/50+O(\eta)} \geq \delta^{\varepsilon/10}.$$

**步骤 3.** 对每个  $W \in \mathcal{W}_1$  定义着色

$$\tilde{Y}_1(W) = W \cap N_a \left( \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[W]} Y_1(T) \right).$$

由 (5.26),

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \lambda \left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} \tilde{Y}_1(W) \right|. \quad (5.29)$$

下面证明  $(\mathcal{W}_1, \tilde{Y}_1)_{a \times b \times 1}$  为  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密的。论证如图 8 所示。固定  $W \in \mathcal{W}$ 。由于  $(\mathbb{T}_1^W, Y_1^W)$  为  $\gtrsim \delta^{O(\eta)}$ -稠密, 可进一步精化, 使每个  $T \in \mathbb{T}_1[W]$  都满足  $|Y_1(T)| \gtrsim \delta^{O(\eta)} |T|$ 。再经鸽巢, 选取一族本质不同的  $a$ -管  $\mathbb{T}_a$ , 构成  $\mathbb{T}_1[W]$  的  $\approx_\delta 1$ -平衡覆盖。由于  $(\mathbb{T}_1^W, Y_1^W)$  以  $\lesssim_\delta \delta^{-O(\eta)}$  的误差满足 Frostman 凸 Wolff 公理,  $\mathbb{T}_a$  也以同样量级的误差满足该公理。着色  $Y_a(T_a) = T_a \cap N_a(\bigcup_{T \in \mathbb{T}[W]} Y_1(T))$  为  $\approx_\delta \delta^{O(\eta)}$ -稠密的。将引理 5.7 应用于  $(\mathbb{T}_a^W, Y_a^W)_{a/b \times 1 \times 1}$ , 再撤销重标度  $\phi_W$ , 得到

$$\left| W \cap N_a \left( \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[W]} Y_1(T) \right) \right| \geq \left| \bigcup_{T_a \in \mathbb{T}_a} Y_a(T_a) \right| \gtrsim_\delta \delta^{O(\eta)} |W|.$$

**步骤 4.** 还需估计 (5.29) 的右端。先考虑  $a \leq \delta^{\varepsilon/100}$ 。此时  $(\mathcal{W}_1, \tilde{Y}_1)_{a \times b \times 1}$  为  $a^{O(\eta/\varepsilon)}$ -稠密的。若根据  $\varepsilon$  把  $\eta$  取得足够小, 则可应用  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  得到

$$\left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} \tilde{Y}_1(W) \right| \geq \kappa_\varepsilon a^{\varepsilon/2} b^\omega \tilde{m}^{-1} (\#\mathcal{W}_1) |W| \left( \tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell} (\#\mathcal{W}_1) |W|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \quad (5.30)$$

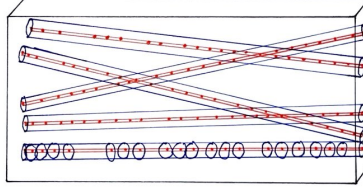


图 8:  $\mathbb{T}_a$  中每根  $a$ -管 (蓝色) 至少包含  $\mathbb{T}_1[W]$  中一根  $\delta$ -管 (红色); 这根  $\delta$ -管具有稠密着色 (红点), 从而在包含它的  $a$ -管上诱导出稠密着色 (蓝球; 为清晰起见, 仅对其中一根  $a$ -管画出)。最后, 由于  $W$  (黑色盒) 厚度为  $a$ , 且  $W$  内的  $a$ -管满足重标度后的 Frostman 凸 Wolff 公理, 一个  $L^2$  论证说明这些  $a$ -管的并集具有几乎充分的体积。

其中  $\tilde{m} = C_{KT-CW}(\mathcal{W}_1)$ ,  $\tilde{\ell} = C_{F-SW}(\mathcal{W}_1)$ 。估计  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  还包含 (5.6) 中的  $D$  项, 不过我们声称命题 5.1 的 (A)、(B) 两部分中均有

$$D \lesssim \delta^{-\eta}. \quad (5.31)$$

验证如下。在 (A) 中, 假设  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}) \leq \delta^{-\eta}$ ; 按注 5.6 的情形 1, 这保证  $D \lesssim \delta^{-\eta}$ 。在 (B) 中, 假设

$$C_{KT-CW}(\mathcal{W}[N_b(W)]) \leq \delta^{-\eta} \quad \text{对所有 } W \in \mathcal{W}.$$

按注 5.6 的情形 2, 这同样保证  $D \lesssim \delta^{-\eta}$ , 于是 (5.31) 成立。

综上, 当  $a \leq \delta^{\varepsilon/100}$  时得到 (5.30)。若  $a > \delta^{\varepsilon/100}$ , 则由

$$\left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} \tilde{Y}_1(W) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon/20} \gtrsim \delta^{\varepsilon/20} \tilde{m}^{-1}(\#\mathcal{W}_1)|W|. \quad (5.32)$$

也可得到 (5.30)。

将 (5.28)、(5.29) 与 (5.30) (当  $a \leq \delta^{\varepsilon/100}$ ) 或 (5.32) (当  $a \geq \delta^{\varepsilon/100}$ ) 结合, 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim_{\delta} \delta^{\omega+\varepsilon+O(\eta)-\varepsilon^2/200} \left(\frac{b}{a}\right)^{\omega} \tilde{m}^{-1}(\#\mathcal{W}_1)|W| \left(\tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell}(\#\mathcal{W}_1)|W|^{1/2}\right)^{-\sigma} \left(\left(\frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathcal{W}_1}\right)^{1/2} \frac{|T|}{|W|}\right)^{\sigma} \\ &= \delta^{\omega+\varepsilon-\varepsilon^2/300} \left(\frac{b}{a}\right)^{\omega} \tilde{m}^{-1}(\#\mathcal{W}_1)|W| \left(\tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell}(\#\mathcal{W}_1)^{3/2} |W|^{3/2} (\#\mathbb{T})^{-1/2} |T|^{-1}\right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

**步骤 5.** 还需分析 (5.33) 的右端。命题 5.1 的 (A)、(B) 两部分分别处理。先看 (A)。有  $\tilde{m} \lesssim \delta^{-\eta}$ ; 又由于  $\mathcal{W}_1$  是  $\mathbb{T}_1$  的  $\approx_{\delta} \delta^{-O(\eta)}$ -平衡覆盖, 由注 4.3(A) (Frostman Wolff 常数向上继承),  $\delta^{\eta} \tilde{\ell} \lesssim_{\delta} C_{F-SW}(\mathbb{T}) = \ell$ 。此外,  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{T}$  的  $\delta^{-\eta}$ -平衡、 $\delta^{-\eta}$ -近似分割覆盖, 且对每个  $W \in \mathcal{W}$  有  $\#\mathbb{T}[W] \geq \delta^{\eta} C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \frac{|W|}{|T|}$ ; 又  $\mathcal{W}_1$  是  $\mathcal{W}$  的精华, 所以  $(\#\mathcal{W}_1)|W| \gtrsim_{\delta} \delta^{\eta} m^{-1}(\#\mathbb{T})|T|$ 。于是 (5.33) 的右端化为

$$\delta^{\omega+\varepsilon} \left(\frac{b}{a}\right)^{\omega} m^{-1}(\#\mathbb{T})|T| \left(m^{-3/2} \ell(\#\mathbb{T})|T|^{1/2}\right)^{-\sigma},$$

这正是所需结论。

再看 (B)。有  $\tilde{m} \lesssim_\delta \delta^{-\eta} |W|(\#\mathcal{W}) \lesssim_\delta \delta^{-\eta} |W|(\#\mathcal{W}_1)$ , 并且  $\tilde{\ell} \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ 。因此 (5.33) 右端化为

$$\delta^{\omega+\varepsilon} \left(\frac{b}{a}\right)^\omega \left((\#\mathbb{T})^{1/2} |T|\right)^\sigma.$$

命题 5.1 证毕。

#### 5.4 命题 5.2 的证明：两个尺度上的因子分解

命题 5.2 的证明与命题 5.1 几乎相同。与其给出一个更复杂的统一证明，为了叙述清楚，我们简要勾勒命题 5.2 的证明，并指出两者的不同之处。

首先精化着色  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 找到子集  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ , 使其在半径  $a$  的球上具有至少平均的密度; 这对应于 (5.26)。由引理 4.11, 对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $C_{F-SW}(\mathbb{T}^W) \lesssim_\delta C_{F-SW}(\mathbb{T}^{T_\rho}) \cdot C_{F-SW}(\mathbb{T}_\rho^W) \lesssim_\delta \delta^{-\eta} \ell'$ 。因此 (5.27) 的对应形式为

$$\left| \bigcup_{T^W \in \mathbb{T}_1^W} Y_1^W(T^W) \right| \gtrsim \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\varepsilon/2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}^W) |T^W| \left(m^{-3/2} (\delta^{-\eta} \ell') (\#\mathbb{T}^W) |T^W|^{1/2}\right)^{-\sigma}, \quad (5.34)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ 。由此得到 (5.28) 的对应形式:

$$\lambda \gtrsim_\delta \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\varepsilon/2} \delta^{O(\eta)} \left(\frac{\delta}{a}\right)^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}[W]) |T| \left(m^{-3/2} \ell' (\#\mathbb{T}^W) |T^W|^{1/2}\right)^{-\sigma}. \quad (5.35)$$

下一步是在  $\mathcal{W}$  上定义稠密着色。正是在这里使用  $\mathcal{W}$  关于 Frostman 凸 Wolff 公理以误差  $\leq \delta^{-\eta}$  从下因子分解  $\mathbb{T}_\rho$  的事实; 它允许我们采用命题 5.1 证明步骤 3 中的同一论证, 得到  $\tilde{Y}_1(W)$  为  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密的。

最后, 我们有 (5.30) 的对应形式:

$$\left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} \tilde{Y}_1(W) \right| \gtrsim a^{\varepsilon/2} b^\omega \tilde{m}^{-1} (\#\mathcal{W}_1) |W| \left(\tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell} (\#\mathcal{W}) |W|^{1/2}\right)^{-\sigma}, \quad (5.36)$$

其中  $\tilde{m} = C_{KT-CW}(\mathcal{W}_1) \leq \delta^{-\eta}$  (由假设), 且  $\tilde{\ell} = C_{F-SW}(\mathcal{W}_1) \lesssim \delta^{-\eta} \ell$  (由注 4.3(A))。

将 (5.35) 与 (5.36) 合并 (采用得到 (5.33) 时的同一论证), 得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon+\omega} \left(\frac{b}{a}\right)^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left(m^{-3/2} \ell \ell' (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2}\right)^{-\sigma}.$$

#### 5.5 组织到薄板中的管

本节最后利用目前建立的工具证明如下结论。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族管及其着色。假设对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 都存在一个包含  $T$  的  $\delta \times b \times 1$  薄板  $S$ , 使  $S$  与  $\bigcup_{\mathbb{T}} Y(T)$  有很大交集。那么只要  $C_{KT-CW}(\mathbb{T})$  很小,  $\bigcup_{\mathbb{T}} Y(T)$  的体积就会大于估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  所预期的大小; 而且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T})$  越小、 $b$  越大, 估计越强。精确陈述如下。

**引理 5.17.** 设  $\omega > 0, \sigma \in [0, 2/3]$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族管及其着色。令  $b \geq \delta$ , 并假设对每个  $T \in \mathbb{T}$  都存在包含  $T$  的  $\delta \times b \times 1$  棱柱  $S$ , 满足  $|S \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)| \geq \delta^\eta |S|$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^\varepsilon b^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-1} \ell (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma} \left( \frac{|S|}{|T|} \right)^{\sigma/2}, \quad (5.37)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ,  $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。

注 5.18. 注意, (5.37) 中  $m$  的总指数仅为  $m^{\sigma-1}$ , 而不是  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  中通常的  $m^{(3/2)\sigma-1}$ 。这很可能不是最优的, 但实际中我们只会在  $m$  大小约为 1 时应用引理 5.17, 所以这一差别并不重要。

证明. 经过鸽巢, 可选取  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ , 以及一族本质不同的  $\delta \times b \times 1$  薄板  $S$ , 满足:

- 对每个  $T \in \mathbb{T}_1$  及其对应薄板  $S(T)$ , 存在  $S$  中某个与  $S(T)$  可比较的薄板  $S$ 。记为  $T \sim S$ ;
- 存在整数  $N$ , 使得对  $S$  中每个薄板, 都有  $N$  到  $2N$  根  $T \in \mathbb{T}_1$  满足  $T \sim S$ 。

略微滥用记号, 把  $S$  中每个薄板替换为其 10 倍膨胀。于是:

- (i)  $S$  覆盖  $\mathbb{T}_1$ ;
- (ii) 对每个  $S \in \mathcal{S}$ ,  $\#\mathbb{T}[S] \geq N$ ;
- (iii)  $\#\mathcal{S} \sim N^{-1}(\#\mathbb{T}_1)$ ;
- (iv) 着色  $Y(S) = S \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$  为  $\gtrsim \delta^\eta$ -稠密的。

由 (ii)、(iii),

$$C_{F-SW}(\mathcal{S}) \lesssim C_{F-SW}(\mathbb{T}_1) \lesssim_\delta \delta^{-\eta} \ell,$$

并且

$$C_{KT-CW}(\mathcal{S}) \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}_1) \frac{\#\mathcal{S}}{\#\mathbb{T}_1} \frac{|S|}{|T|} \lesssim_\delta \delta^{-\eta} m \frac{\#\mathcal{S}}{\#\mathbb{T}} \frac{|S|}{|T|}. \quad (5.38)$$

我们希望利用命题 5.14, 把估计  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  应用于  $\bigcup Y(S)$ 。在此之前先估计 (5.6) 中的  $D$ 。由注 5.6 的情形 2 与 (5.38),

$$D \lesssim \left( \sup_{S \in \mathcal{S}} C_{KT-CW}(S[N_b(S)]) \right)^{1/2} \lesssim_\delta \left( \delta^{-\eta} m \frac{\#\mathcal{S}}{\#\mathbb{T}} \frac{|S|}{|T|} \right)^{1/2}.$$

若根据  $\omega, \sigma, \varepsilon$  把  $\eta, \kappa > 0$  取得足够小, 则可应用  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  得到

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\geq \left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}} Y(S) \right| \\
&\geq \kappa \delta^{\varepsilon/2} b^\omega C_{KT-CW}(\mathcal{S})^{-1} (\#\mathcal{S}) |S| \left( C_{KT-CW}(\mathcal{S})^{-3/2} C_{F-SW}(\mathcal{S}) (\#\mathcal{S}) |S|^{1/2} \right)^{-\sigma} D^{-\sigma} \\
&\gtrsim_\delta \kappa \delta^{\varepsilon/2+2\eta} b^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-1} \ell(\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \left( m^{1/2} \frac{|S|}{|T|} \frac{(\#\mathcal{S})^{1/2}}{(\#\mathbb{T})^{1/2}} D^{-1} \right)^\sigma \\
&\gtrsim_\delta \kappa \delta^{\varepsilon/2+2\eta} b^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-1} \ell(\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \left( \frac{|S|}{|T|} \right)^{\sigma/2}. \quad \square
\end{aligned}$$

我们经常只需要引理 5.17 的如下较弱版本。

**推论 5.19.** 设  $\omega > 0, \sigma \in (0, 2/3]$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta, c > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族管及其着色。令  $\rho \geq \delta$ , 并假设对每个  $T \in \mathbb{T}$  都存在包含  $T$  的  $\rho$ -管  $T_\rho$ , 满足  $|T_\rho \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)| \geq \delta^\eta |T_\rho|$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^\varepsilon \rho^\omega m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-1} \ell(\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \left( \frac{\rho}{\delta} \right)^{\sigma/2}, \quad (5.39)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ,  $\ell = C_{F-SW}(\mathbb{T})$ 。

## 6 断言 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{E}$ 等价

本节目标是证明命题 1.6。为此需要使用 [26] 的一个结果。非正式地说, 该结果表明: 若一族  $\delta$ -管在许多不同尺度上满足 Frostman 凸 Wolff 公理, 则这些管的并集必须具有很大体积。为精确陈述, 先回顾 [26] 中的定义 2.12。

**定义 6.1.** 设  $K \geq 1, \delta > 0$ 。若  $\mathbb{R}^3$  中一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  的管彼此本质不同, 并且对每个  $\rho_0 \in [\delta, 1]$ , 都存在  $\rho \in [\rho_0, K\rho_0)$  以及一族满足下述性质的  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 则称  $\mathbb{T}$  在每一尺度上以误差  $K$  满足 *Frostman 凸 Wolff 公理*:

- (i)  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的  $K$ -平衡分割覆盖;
- (ii) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  以误差  $K$  满足 Frostman 凸 Wolff 公理。

接着回顾 [26] 中的定理 5.2。

**定理 6.2.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  是一族在每一尺度上以误差  $\delta^{-\eta}$  满足 *Frostman 凸 Wolff 公理* 的  $\delta$ -管,  $Y(T)$  为  $\delta^\eta$ -稠密着色。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^\varepsilon. \quad (6.1)$$

当  $\varepsilon < \omega$  时, 定理 6.2 的结论比断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  中的体积估计 (1.3) 更强, 但  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的假设更弱。下一结果说明, 对每一族满足 Frostman 凸 Wolff 公理的管  $\mathbb{T}$ , 下列三种情形至少发生一种:

- (A)  $\mathbb{T}$  满足定理 6.2 的假设。只要选  $\varepsilon < \omega$ , 这就是有利情形;
- (B) 在某个适当尺度上,  $\mathbb{T}$  以约为 1 的误差满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。若已知某个  $\omega_1 < \omega$  下  $\mathcal{D}(\sigma, \omega_1)$  成立, 这也是有利情形;
- (C) 在某个适当尺度上,  $\mathbb{T}$  被扁平长方棱柱因子分解, 因而满足命题 5.1 的假设。该情形同样有利, 因为可得到比  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  更强的体积估计。

精确陈述如下。

**命题 6.3.** 设  $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \zeta_3 > 0$ 。则存在  $\eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  为一族以误差  $\leq \delta^{-\eta}$  满足 Frostman 凸 Wolff 公理的  $\delta$ -管。把  $\mathbb{T}$  替换为一个  $\approx_\delta 1$  精化后, 下列至少一个成立。

- (A) 按定义 6.1,  $\mathbb{T}$  在每一尺度上以误差  $\delta^{-\zeta_1}$  满足 Frostman 凸 Wolff 公理。
- (B) 存在  $\delta \leq \tau < \rho \leq 1$ , 满足  $\tau \leq \delta^{\zeta_1/5} \rho$ ; 存在  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\tau$ , 以及  $\mathbb{T}_\tau$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\rho$ , 使得:
  - (i) 对每个  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$ ,  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^{T_\tau}) \lesssim \delta^{-\zeta_2}$ ;
  - (ii) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\rho}) \lesssim \delta^{-\zeta_2}$ , 且  $\#\mathbb{T}_\tau^{T_\rho} \geq \delta^{\zeta_2}(\rho/\tau)^2$ ;
  - (iii)  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ 。
- (C) 存在  $\delta \leq a < b \leq 1$ , 满足  $a \leq \delta^{\zeta_2/100} b$ , 以及一族  $a \times b \times 1$  棱柱  $\mathcal{W}$ , 它满足命题 5.1(B) 的假设:  $\mathcal{W}$  以误差  $O(\delta^{-\zeta_3})$  关于 Frostman 凸 Wolff 公理从上、从下因子分解  $\mathbb{T}$ 。并且对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}[N_b(W)]) \lesssim \delta^{-\zeta_3}$ 。

命题 6.3 的证明推迟到第 6.3 节。

利用命题 6.3, 先证明命题 1.6 的一个较弱形式; 回顾  $\tilde{\mathcal{E}}$  定义于定义 5.3。

**引理 6.4.** 设  $0 < \sigma \leq 2/3$ 。对所有  $\omega, t > 0$ , 存在  $\alpha > 0$ , 使得对所有  $\omega' \geq \omega + t$  下述结论成立。若  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  与  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  都成立, 则  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega' - \alpha)$  成立。

证明. 令  $\alpha = \alpha(\sigma, \omega, t) > 0$  为下文指定的小数。令  $\eta, \kappa > 0$  为依赖于  $\omega, \omega', \sigma$  的小数。目标是证明: 若  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的且  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ , 则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} \right| \geq \kappa \delta^{\omega' - \alpha} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \quad (6.2)$$

其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ 。注意, (6.2) 比目标估计  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega' - \alpha)$  略强, 因为没有额外的  $\delta^\varepsilon$  损失; 由于  $\omega' - \omega > 0$  留出了一些余量, 因此可以得到这一更强估计。

**步骤 1。**不妨假设对每个  $T \in \mathbb{T}$  都有  $|Y(T)| \geq \delta^\eta |T|$ 。令  $\zeta_i = \zeta_i(\sigma, \omega, t)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , 为下文选择的小量; 我们将使  $\zeta_{i+1}$  远小于  $\zeta_i$ , 并使  $\eta$  远小于  $\zeta_5$ 。

先考虑存在子集  $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ , 满足  $\#\mathbb{T}' \geq \delta^\eta (\#\mathbb{T})$  且  $C_{F-CW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\zeta_4}$  的情形 (这一假设一直保留到步骤 4, 届时再处理不存在这种子集的情形)。略微滥用记号, 仍用  $\mathbb{T}$  表示该子集。特别地,

$$\#\mathbb{T} \gtrsim_\delta \delta^{\eta+\zeta_4} m |T|^{-1}, \quad \text{且} \quad C_{F-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\zeta_4}. \quad (6.3)$$

若相对于  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  把  $\zeta_4$  与  $\eta$  取得足够小, 则可将命题 6.3 应用于  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ 。选择  $\zeta_1 = \zeta_1(\omega)$  并把  $\eta$  取得足够小, 使得若命题 6.3 的结论 (A) 成立, 就可利用定理 6.2 得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \delta^\omega,$$

从而只要取  $\alpha(\omega, t) \leq t$ , (6.2) 即成立。以下假设结论 (A) 不成立。

**步骤 2。**假设命题 6.3 的结论 (B) 成立。如下在  $\mathbb{T}_\tau$  与  $\mathbb{T}_\rho$  上定义着色  $Y_\tau, Y_\rho$ 。对每个  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$ , 把  $\mathbb{T}[T_\tau]$  上的着色精化, 使其在半径  $\tau$  的球上具有平均密度 (见 (5.26) 及其附近讨论)。令  $Y_\tau(T_\tau)$  为所有与  $\bigcup_{\mathbb{T}[T_\tau]} Y(T)$  相交的  $\tau$ -球之并。类似定义  $Y_\rho$  (这也诱导  $Y_\tau$  与  $Y$  的精化)。

完成这些步骤后,  $(\mathbb{T}_\rho, Y_\rho)_\rho$  为  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密的; 每个  $(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}, Y_\tau^{T_\rho})_{\tau/\rho}$  为  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密的; 每个  $(\mathbb{T}^{T_\tau}, Y^{T_\tau})_{\delta/\tau}$  也为  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密的。而且

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \left( \left| \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} Y_\rho(T_\rho) \right| \right) \left( \inf_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} \left| \bigcup_{T_\tau^{T_\rho} \in \mathbb{T}_\tau^{T_\rho}} Y_\tau^{T_\rho}(T_\tau^{T_\rho}) \right| \right) \left( \inf_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} \left| \bigcup_{T^{T_\tau} \in \mathbb{T}^{T_\tau}} Y^{T_\tau}(T^{T_\tau}) \right| \right). \quad (6.4)$$

接下来如下估计右端三个因子:

$$\left| \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} Y_\rho(T_\rho) \right| \geq \delta^{\varepsilon_1} \rho^{\omega'} ((\#\mathbb{T}_\rho)^{1/2} |T_\rho|)^\sigma, \quad (6.5)$$

$$\inf_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} \left| \bigcup_{T_\tau^{T_\rho} \in \mathbb{T}_\tau^{T_\rho}} Y_\tau^{T_\rho}(T_\tau^{T_\rho}) \right| \geq \delta^{\varepsilon_1} \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^\omega \left( \left( \frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_\rho} \right)^{1/2} \frac{|T_\tau|}{|T_\rho|} \right)^\sigma, \quad (6.6)$$

$$\inf_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} \left| \bigcup_{T^{T_\tau} \in \mathbb{T}^{T_\tau}} Y^{T_\tau}(T^{T_\tau}) \right| \geq \delta^{\varepsilon_1} \left( \frac{\delta}{\tau} \right)^{\omega'} \left( \left( \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_\tau} \right)^{1/2} \frac{|T|}{|T_\tau|} \right)^\sigma, \quad (6.7)$$

其中  $\varepsilon_1 = \frac{\zeta_1}{24}(\omega - \omega')$ 。

首先注意, 若把  $\eta$  取得足够小, 则当  $\rho > \delta^{\varepsilon_1/2}$  (相应地,  $\delta/\tau > \delta^{\varepsilon_1/2}$ ) 时, (6.5) (相应地 (6.6) 或 (6.7)) 自动成立, 因为这些并集的体积至少等于一根管的体积。特别地:

- 要么 (6.5) 自动成立, 要么  $(\mathbb{T}_\rho, Y_\rho)_\rho$  为  $\rho^{O(\eta/\varepsilon_1)}$ -稠密的, 并且  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim \rho^{-2\zeta_2/\varepsilon_1}$ ;
- 由于  $\varepsilon_1 \leq \zeta_1/24$  且  $\tau \leq \delta^{\zeta_1/5} \rho$ , 每个  $(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}, Y_\tau^{T_\rho})_{\tau/\rho}$  为  $(\tau/\rho)^{O(\eta/\varepsilon_1)}$ -稠密的, 并满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}) \lesssim (\tau/\rho)^{-2\zeta_2/\varepsilon_1}$  与  $\#\mathbb{T}_\tau^{T_\rho} \geq (\tau/\rho)^{2\zeta_2/\varepsilon_1} (\rho/\tau)^2$ ;

- 要么 (6.7) 自动成立, 要么每个  $(\mathbb{T}^{T_\tau}, Y^{T_\tau})_{\delta/\tau}$  为  $(\delta/\tau)^{O(\eta/\varepsilon_1)}$ -稠密的, 并满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}^{T_\tau}) \lesssim (\delta/\tau)^{-2\zeta_2/\varepsilon_1}$ 。

若根据  $\omega, t$  把  $\eta$  与  $\zeta_2$  取得足够小 (原文记号中还写明  $t \leq \omega - \omega'$ ;  $\eta, \zeta_2$  也依赖于  $\varepsilon_1$ , 而  $\varepsilon_1$  只依赖于  $\zeta_1 = \zeta_1(\omega, \omega, t)$ ), 则由上面三点, (6.5)、(6.6)、(6.7) 分别由  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$ 、 $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$ 、 $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  推出。

结合 (6.4)、(6.5)、(6.6) 与 (6.7), 得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \delta^{3\varepsilon_1} \left( \frac{\rho}{\tau} \right)^{\omega - \omega'} \delta^{\omega'} \left( (\#\mathbb{T})^{1/2} |T| \right)^\sigma \geq \delta^{\frac{\zeta_1(\omega - \omega')}{8}} \delta^{\omega'} \left( (\#\mathbb{T})^{1/2} |T| \right)^\sigma. \quad (6.8)$$

将 (6.3) 与 (6.8) 结合可验证: 只要  $\alpha(\omega, t) \leq \frac{\zeta_1 t}{16}$ 、 $\zeta_4 < \frac{\zeta_1 t}{17}$ , 并把  $\eta > 0$  取得足够小, (6.2) 就成立。以下假设命题 6.3 的结论 (B) 不成立。

**步骤 3.** 假设命题 6.3 的结论 (C) 成立, 即存在一族  $a \times b \times 1$  棱柱  $\mathcal{W}$ , 其中  $a \leq \delta^{\zeta_2/100} b$ , 并满足命题 5.1(B) 的假设:  $\mathcal{W}$  以误差  $O(\delta^{-\zeta_3})$  关于 Frostman 凸 Wolff 公理从上、从下因子分解  $\mathbb{T}$ ; 而且对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}[N_b(W)]) \lesssim \delta^{-\zeta_3}$ 。

令  $\varepsilon_2 = \zeta_2 \omega / 200$ 。若根据  $\zeta_2, \varepsilon_2$  把  $\zeta_3$  取得足够小 (这两个量最终都只依赖于  $\omega, t$ ), 并把  $\eta > 0$  取得足够小, 则由命题 5.1(B) (其中用  $\varepsilon_2$  替代  $\varepsilon$ ) 有

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim \delta^{\omega' + \varepsilon_2} \left( \frac{b}{a} \right)^{\omega'} ((\#\mathbb{T})^{1/2} |T|)^\sigma \\ &\geq \delta^{\omega' + \varepsilon_2} \delta^{-\frac{\zeta_2 \omega}{100}} ((\#\mathbb{T})^{1/2} |T|)^\sigma \\ &\geq \delta^{\omega' - \frac{\zeta_2 \omega}{200}} ((\#\mathbb{T})^{1/2} |T|)^\sigma. \end{aligned} \quad (6.9)$$

把 (6.3) 与 (6.9) 结合, 可验证只要  $\alpha(\omega, t) \leq \frac{\zeta_2 \omega}{400}$ 、 $\zeta_4 < \frac{\zeta_2 \omega}{500}$ , 并把  $\eta > 0$  取得足够小, (6.2) 即成立。

**步骤 4.** 最后考虑如下情形: 每个满足  $\#\mathbb{T}' \geq \delta^\eta (\#\mathbb{T})$  的子集  $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$  都有  $C_{F-CW}(\mathbb{T}') > \delta^{-\zeta_4}$ 。把命题 4.6 (凸集族的因子分解) 应用于  $\mathbb{T}$ , 记输出为  $\mathbb{T}'$  与  $\mathcal{W}$ 。命题 4.6 的第 ii) 项给出  $\#\mathbb{T}[W] \approx_\delta C_{KT-CW}(\mathbb{T}') \frac{|W|}{|T|}$ 。又因  $\#\mathbb{T}' \geq \delta^\eta (\#\mathbb{T})$ , 有  $C_{F-CW}(\mathbb{T}') > \delta^{-\zeta_4}$ 。另一方面, 对每个  $W \in \mathcal{W}$ ,  $C_{F-CW}(\mathbb{T}'^W) \lesssim_\delta 1$ , 由此推出  $|W| \lesssim_\delta \delta^{\zeta_4}$  (回顾  $\mathcal{W}$  中各集合全等, 因此体积相同)。

若  $\mathcal{W}$  中的棱柱是扁平的, 即与满足  $a \leq \delta^{\zeta_5} b$  的  $a \times b \times 1$  棱柱可比较, 则可把命题 5.1(A) 应用于它们, 其中令  $\varepsilon_3 = \zeta_5 \omega' / 2$ , 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim \delta^{\omega' + \varepsilon_3} \left( \frac{b}{a} \right)^{\omega'} (m')^{-1} (\#\mathbb{T}') |T| ((m')^{-3/2} (\ell') (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma} \\ &\gtrsim \delta^{\omega' - \frac{\zeta_5 \omega'}{2} + 2\eta} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| (m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

第二个不等式使用了  $\#\mathbb{T}' \geq \delta^\eta \#\mathbb{T}$ 、 $\ell' := C_{F-SW}(\mathbb{T}') \lesssim \delta^{-\eta}$ 、 $m' := C_{KT-CW}(\mathbb{T}') \leq m$  以及  $\sigma \leq 2/3$ 。于是只要  $\alpha(\omega, t) \leq \frac{\zeta_5 \omega}{4} \leq \frac{\zeta_5 \omega'}{4}$ , 并把  $\eta > 0$  取得足够小, (6.2) 成立。

最后考虑  $\mathcal{W}$  中棱柱不扁平的情形, 即  $a \geq \delta^{\zeta_5} b$ 。把每个  $W \in \mathcal{W}$  替换为其  $b$ -邻域, 再把对应的  $b$ -管族  $\mathbb{T}_b$  精化一个因子  $(b/a)^3 \leq \delta^{-3\zeta_5}$  (这是一个  $b$ -管中可装入的本质不同  $a \times b \times 1$  棱柱数), 使  $\mathbb{T}_b$  中各管本质不同。由于  $|W| \lesssim_\delta \delta^{\zeta_4}$  且  $a \geq \delta^{\zeta_5} b$ , 有

$$b \lesssim_\delta \delta^{\zeta_4/2 - \zeta_5} \leq \delta^{\zeta_4/3}. \quad (6.11)$$

总结起来,  $\mathbb{T}_b$  具有以下性质:

- $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_b) \lesssim \frac{b}{a} C_{KT-CW}(\mathcal{W}) \lesssim_\delta \delta^{-\zeta_5} \leq b^{-3\zeta_5/\zeta_4}$ ;
- $C_{F-SW}(\mathbb{T}_b) \lesssim \delta^{-3\zeta_5} C_{F-SW}(\mathcal{W}) \lesssim_\delta \delta^{-3\zeta_5} C_{F-SW}(\mathbb{T}) \lesssim_\delta \delta^{-3\zeta_5 - \eta}$ ;
- 对每个  $T_b \in \mathbb{T}_b$ ,  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^{T_b}) \lesssim \frac{b}{a} C_{F-CW}(\mathbb{T}^W) \lesssim_\delta \delta^{-\zeta_5}$ , 其中  $\mathcal{W} \ni W \subset T_b$  是包含  $\mathbb{T}[T_b]$  中所有管的棱柱;
- 对每个  $T_b \in \mathbb{T}_b$ ,  $\#\mathbb{T}^{T_b} \lesssim_\delta C_{KT-CW}(\mathcal{W}) \frac{b}{a} \#\mathbb{T}^W \lesssim_\delta \frac{b}{a} m \frac{|W|}{|T|} \lesssim_\delta \delta^{-2\zeta_5} m \frac{|T_b|}{|T|}$ 。

(在第二项中, 关键使用了  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ ; 这也解释了为何引理 6.4 的结论只说  $\tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega' - \alpha)$  成立, 而不是表面上更强的  $\mathcal{E}(\sigma, \omega' - \alpha)$  成立。)

仿照步骤 2, 对每个  $\mathbb{T}[T_b]$  上的着色  $Y(T)$  作精化, 使其在半径  $b$  的球上具有平均密度。令  $Y_b(T_b)$  为所有与  $\bigcup_{\mathbb{T}[T_b]} Y(T)$  相交的  $b$ -球之并。于是  $(\mathbb{T}_b, Y_b)_b$  为  $\delta^\eta \geq b^{3\eta/\zeta_4}$ -稠密的。得到 (6.4) 的如下二因子版本:

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \left( \left| \bigcup_{T_b \in \mathbb{T}_b} Y_\rho(T_b) \right| \right) \left( \inf_{T_b \in \mathbb{T}_b} \left| \bigcup_{T^{T_b} \in \mathbb{T}^{T_b}} Y^{T_b}(T^{T_b}) \right| \right). \quad (6.12)$$

令  $\varepsilon_4 = \frac{\zeta_4(\omega - \omega')}{12}$ 。若根据  $\zeta_4, \varepsilon_4$  (最终依赖于  $\omega, t$ ) 把  $\zeta_5$  与  $\eta$  取得足够小, 则可用断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  中的估计 (1.2) 得到

$$\left| \bigcup_{T_b \in \mathbb{T}_b} Y_\rho(T_b) \right| \gtrsim b^{\omega + \varepsilon_4} (\#\mathbb{T}_b) |T_b| ((\#\mathbb{T}_b) |T_b|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (6.13)$$

最后希望得到

$$\left| \bigcup_{T^{T_b} \in \mathbb{T}^{T_b}} Y^{T_b}(T^{T_b}) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon_4} \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\omega'} \left((\#\mathbb{T}^{T_b})^{1/2} \frac{|T|}{|T_b|}\right)^\sigma. \quad (6.14)$$

当  $\delta/b > \delta^{\varepsilon_4/2}$  时, (6.14) 来自以下初等事实: 每个  $Y(T)$  的着色为  $\gtrsim \delta^\eta$ -稠密的, 而左端并集至少有一根管的体积。另一方面, 当  $\delta/b \leq \delta^{\varepsilon_4/2}$  时, 只要根据  $\zeta_4, \varepsilon_4$  把  $\zeta_5$  取得足够小, 由于  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^{T_b}) \lesssim \delta^{-\zeta_5}$ , (6.14) 由断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  中的估计 (1.3) 得到。

由于对每个  $T_b \in \mathbb{T}_b$  都有  $\#\mathbb{T}^{T_b} \lesssim m \delta^{-2\zeta_5} \frac{|T|}{|T_b|}$  (其中  $m = C_{KT-CW}(\mathbb{T})$ ), (6.14) 化为

$$\left| \bigcup_{T^{T_b} \in \mathbb{T}^{T_b}} Y^{T_b}(T^{T_b}) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon_4 + 2\zeta_5} \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\omega'} m^{-1} (\#\mathbb{T}^{T_b}) \frac{|T|}{|T_b|} \left(m^{-3/2} (\#\mathbb{T}^{T_b}) \left(\frac{|T|}{|T_b|}\right)^{1/2}\right)^{-\sigma}. \quad (6.15)$$

结合 (6.12)、(6.13)、(6.15) 与 (6.11), 若取  $\zeta_5 \leq \zeta_4(\omega - \omega')/12$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\geq \delta^{\omega' + \varepsilon_4 + 2\zeta_5} b^{\omega - \omega' + \varepsilon_4} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\geq \delta^{\omega' - \frac{\zeta_4(\omega - \omega')}{12}} m^{-1} (\#\mathbb{T}) |T| \left( m^{-3/2} (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

因此只要  $\alpha(\omega, t) \leq \frac{\zeta_4 t}{12}$ , 并把  $\eta > 0$  取得足够小, (6.2) 成立。  $\square$

现在用引理 6.4 证明命题 1.6。

命题 1.6 的证明. 设  $0 \leq \sigma \leq 2/3$ ,  $\omega \geq 0$ , 并假设断言  $\mathcal{D}(\sigma, \omega)$  成立. 固定  $t > 0$ , 令  $\alpha = \alpha(\sigma, \omega, t) > 0$  为引理 6.4 的输出. 由于一根  $\delta$ -管体积约为  $\delta^2$ ,  $\mathcal{E}(\sigma, 2)$  总是成立. 现在假设对某个  $\omega' \in [\omega + t, 2]$ ,  $\mathcal{E}(\sigma, \omega')$  成立. 先应用引理 6.4, 再应用命题 5.14, 得到

$$\mathcal{E}(\sigma, \omega') \implies \tilde{\mathcal{E}}(\sigma, \omega' - \alpha) \implies \mathcal{E}(\sigma, \omega' - \alpha).$$

反复迭代, 得到某个  $\omega'' \leq \omega + t$  使  $\mathcal{E}(\sigma, \omega'')$  成立, 因此特别地  $\mathcal{E}(\sigma, \omega + t)$  成立。

但  $t > 0$  任意, 而从  $\mathcal{E}$  的定义直接可见, 集合

$$\{\omega' \in [\omega, 2] : \mathcal{E}(\sigma, \omega') \text{ 成立} \}$$

是闭区间. 因此  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。  $\square$

命题 1.6 的证明至此完成, 唯一剩下的是证明命题 6.3. 下面完成这一点。

## 6.1 命题 6.3 的证明: 因子分解三分法

**步骤 1.** 先对  $\mathbb{T}$  作正则化. 令  $\eta > 0$  为稍后确定的小量, 并令  $N = 1/\eta$  为整数. 定义  $\delta_i = \delta^{i/N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . 通过迭代鸽巢并把  $\mathbb{T}$  替换为一个  $|\log \delta|^{-N}$  精化, 不妨假设对每个  $i = 1, \dots, N$ , 都存在一族  $\delta_i$ -管  $\mathbb{T}_{\delta_i}$ , 构成  $\mathbb{T}_{\delta_{i+1}}$  的平衡分割覆盖. 称形如  $\delta_i$  的数为“容许尺度”. 特别地, 对每个容许尺度  $\delta_i$ ,

$$\#\mathbb{T}[T_{\delta_i}] \approx_{\delta} \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_{\delta_i}} \quad \text{对每个 } T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}. \quad (6.17)$$

接下来, 对每个  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  应用命题 4.6. 命题的输出包括  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  的一个  $\approx 1$  精化 (这会诱导  $\mathbb{T}$  以及所有  $j > i$  时  $\mathbb{T}_{\delta_j}$  的  $\approx 1$  精化; 注意精化后 (6.17) 仍成立. 为简化记号, 仍用  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  与  $\mathbb{T}$  表示这些精化), 以及一族  $\mathbb{R}^3$  中的凸集  $\mathcal{W}$ . 若  $|W| \geq \delta^{\zeta_1/2}$ , 则  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}) \leq \delta^{-\zeta_1/2}$ , 此时称  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  为类型 1. 若  $|W| < \delta^{\zeta_1/2}$ , 则称其为类型 2。

现在按如下方式进行. 对  $i = N-1, \dots, 1$ , 若至少一半的  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  ( $T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}$ ) 为类型 1, 则把  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  精化为仅保留那些  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  为类型 1 的  $T_{\delta_i}$ ; 注意 (6.17) 精化后仍成立. 称  $\mathbb{T}$  通过第  $i$  阶段. 若至少一半为类型 2, 则称  $\mathbb{T}$  未通过第  $i$  阶段。

若  $\mathbb{T}$  通过每个阶段  $i = N - 1, \dots, 1$ , 由 (6.17), 对每个  $i = 1, \dots, N$ , 幸存的  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  都是  $\mathbb{T}$  的  $\approx_\delta 1$ -平衡分割覆盖。又因为通过第  $i$  阶段, 对每个  $T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}$  都有  $C_{F-CW}(\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}) \lesssim_\delta \delta^{-\zeta_1/2}$ 。因此  $\mathbb{T}$  在每一尺度上以误差  $O(\delta^{-\zeta_1})$  满足 Frostman 凸 Wolff 公理, 从而命题 6.3 的结论 (A) 成立。

**步骤 2。** 设  $\mathbb{T}$  未通过某个阶段  $i \geq 1$ 。经鸽巢并把  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  与  $\mathbb{T}$  替换为  $\approx_\delta 1$  精化, 不妨假设存在  $\delta \leq a \leq b \leq 1$ , 使得对每个  $T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}$ , 将命题 4.6 应用于  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  的输出包含一族  $\frac{a}{\delta_i} \times \frac{b}{\delta_i} \times 1$  棱柱  $\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}$ , 它是  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$  的  $\approx_\delta 1$ -平衡覆盖, 并以  $\lesssim_\delta 1$  的误差关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理从上、关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下因子分解  $\mathbb{T}^{T_{\delta_i}}$ 。

由于  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  中各管本质不同, 可再精化一个  $\sim 1$  因子, 使任意相交的不同管  $T_{\delta_i}, T'_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}$  都满足  $\angle(\text{dir}(T_{\delta_i}), \text{dir}(T'_{\delta_i})) \geq 100\delta_i$ , 从而特别有

$$\text{diam}(2T_{\delta_i} \cap 2T'_{\delta_i}) \leq \frac{1}{2}. \quad (6.18)$$

定义

$$\mathcal{W} = \bigsqcup_{T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}} \phi_{T_{\delta_i}}^{-1}(\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}).$$

则  $\mathcal{W}$  是一族凸集, 每个都与  $a \times b \times 1$  棱柱可比较。由于  $\mathbb{T}$  未通过第  $i$  阶段,  $\mathcal{W}$  中的棱柱远小于  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  中的管; 具体地,

$$|W| \lesssim \delta^{\zeta_1/2} |T_{\delta_i}|. \quad (6.19)$$

我们声称  $\mathcal{W}$  中的凸集本质不同。事实上, 同一  $\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}$  中任意两个凸集本质不同。若  $W \in \mathcal{W}_{T_{\delta_i}}$ ,  $W' \in \mathcal{W}_{T'_{\delta_i}}$  来自不同的  $T_{\delta_i}, T'_{\delta_i}$ , 则由 (6.18),  $\text{diam}(W \cap W') \leq \text{diam}(T_{\delta_i} \cap T'_{\delta_i}) \leq 1/2$ , 故  $W, W'$  也本质不同。

由于  $\mathcal{W}$  是  $\mathbb{T}$  的  $\approx_\delta 1$ -平衡覆盖, 且  $C_{F-CW}(\mathbb{T}) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ , 由注 4.3(A) (Frostman Wolff 公理向上继承),  $C_{F-CW}(\mathcal{W}) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ ; 把  $\eta > 0$  取得足够小, 可使  $C_{F-CW}(\mathcal{W}) \lesssim \delta^{-\zeta_3}$ 。

**步骤 3。** 设  $\mathcal{W}$  中的棱柱是扁平的, 即  $a \leq \delta^{\zeta_2/100} b$ 。我们的任务是证明  $\mathcal{W}$  与精化后的  $\mathbb{T}$  满足命题 6.3 的结论 (C)。

每个  $W \in \mathcal{W}$  都来自某个  $\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}$ 。我们声称: 若  $W' \in \mathcal{W}$  且  $W' \subset N_b(W)$ , 则  $W'$  必须来自同一个  $\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}$ , 即

$$\mathcal{W}[N_b(W)] = (\mathcal{W}[T_{\delta_i}])[N_b(W)] = \phi_{T_{\delta_i}}^{-1}(\mathcal{W}_{T_{\delta_i}})[N_b(W)]. \quad (6.20)$$

若不然,  $W'$  来自另一根  $T'_{\delta_i}$ , 则  $W' \subset N_b(W) \cap T'_{\delta_i} \subset 2T_{\delta_i} \cap T'_{\delta_i}$ , 从而后一个集合直径至少为 1, 与 (6.18) 矛盾。

由 (6.20),

$$C_{KT-CW}(\mathcal{W}[N_b(W)]) = C_{KT-CW}((\mathcal{W}[T_{\delta_i}])[N_b(W)]) \leq C_{KT-CW}(\mathcal{W}_{T_{\delta_i}}) \lesssim_\delta 1.$$

所以  $\mathcal{W}$  与精化后的  $\mathbb{T}$  满足命题 6.3 的结论 (C)。

**步骤 4.** 现在考虑  $\mathcal{W}$  中棱柱不扁平的情形, 即  $a > \delta^{\zeta_2/100}b$ 。令  $\tau$  为不小于  $b$  的最小容许尺度。一个  $b$ -管中至多可装入  $O((b/a)^3)$  个本质不同的  $a \times b \times 1$  棱柱, 而一个  $\tau$ -管中至多可装入  $O(\delta^{-4/N}) = O(\delta^{-4\eta})$  个本质不同的  $b$ -管。因此对每个  $\tau$ -管  $T_\tau$ ,  $\mathcal{W}[T_\tau] \lesssim \delta^{-4\eta}(b/a)^3 \lesssim \delta^{-4\zeta_2/100}$  (最后一步取  $\eta \leq \zeta_2/400$ )。对  $\mathbb{T}, \mathcal{W}, \mathbb{T}_\tau$  作鸽巢后, 可假设  $\mathbb{T}_\tau$  是  $\mathcal{W}$  的平衡分割覆盖, 并且

$$1 \leq \#\mathcal{W}[T_\tau] \lesssim \delta^{-4\zeta_2/100} \quad \text{对每个 } T_\tau \in \mathbb{T}_\tau. \quad (6.21)$$

由于对每个  $W \in \mathcal{W}$  都有  $C_{F-CW}(\mathbb{T}[W]) \lesssim_\delta 1$ , 由 (6.21) 得到对每个  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$ ,  $C_{F-CW}(\mathbb{T}[T_\tau]) \lesssim_\delta \delta^{-4\zeta_2/100}$ ; 这给出结论 (B.i)。

此时已经正确找到命题 6.3 的结论 (B) 中尺度  $\tau$ 。尺度  $\rho$  怎么选? 一个候选是  $\delta_i$ 。由 (6.19),  $\tau \lesssim \delta^{\zeta_1/4-2\zeta_2/100}\delta_i \leq \delta^{\zeta_1/5}\delta_i$ , 正符合结论 (B) 的要求。

尺度  $\delta_i$  已满足结论 (B) 的部分性质。回顾对每个  $T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}$ ,  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}[T_{\delta_i}]) \lesssim_\delta 1$ 。又因为  $|T_\tau| = (b/a)|W| \leq \delta^{-\zeta_2/100}|W|$ , 由 (6.21),

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau[T_{\delta_i}]) \leq \delta^{-5\zeta_2/100} \quad \text{对每个 } T_{\delta_i} \in \mathbb{T}_{\delta_i}. \quad (6.22)$$

这是结论 (B.ii) 的一半。若  $\frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_{\delta_i}} \geq \delta^{100\eta}(\delta_i/\tau)^2$  (事实上较弱的  $\frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_{\delta_i}} \geq \delta^{\zeta_2}(\delta_i/\tau)^2$  就足够), 则精化后  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  满足 (B.ii), 而 (B.iii) 由注 4.3(A) 得到, 于是完成。

反之, 设  $\frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_{\delta_i}} < \delta^{100\eta}(\delta_i/\tau)^2$ 。令  $\rho$  为  $[\delta_i, 1]$  中满足

$$\frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_\rho} \geq \delta^{100\eta}(\rho/\tau)^2. \quad (6.23)$$

的最小容许尺度。这样的  $\rho \in [\rho_i, 1]$  必存在: 因为  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\tau) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ , 故  $\#\mathbb{T}_\tau \gtrsim_\delta \delta^\eta \tau^{-2}$ , 所以  $\rho = 1$  满足 (6.23), 是一个有效候选。

对这一  $\rho$ , 特别有

$$\delta^{100\eta}(\rho/\tau)^2 \leq \frac{\#\mathbb{T}_\tau}{\#\mathbb{T}_\rho} \leq \delta^{50\eta}(\rho/\tau)^2, \quad (6.24)$$

因为若右端不成立, 则 (6.23) 会在更小的容许尺度上成立, 与  $\rho$  的极小性矛盾。

暂时假设存在  $\mathbb{T}_\tau$  的一个  $\gtrsim_\delta 1$  精化 (仍记作  $\mathbb{T}_\tau$ ), 使

$$C_{F-CW}(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}) \leq \delta^{-\zeta_2/2} \quad \text{对至少一半的管 } T_\rho \in \mathbb{T}_\rho. \quad (6.25)$$

则 (6.24) 与 (6.25) 推出结论 (B.ii), 而 (B.iii) 再由 Frostman Wolff 公理向上继承得到。因此若 (6.25) 成立, 命题 6.3 的结论 (B) 成立, 证明结束。

**步骤 5.** 我们声称: 要么 (6.25) 成立 (如上一步所述, 证明完成), 要么命题 6.3 的结论 (C) 成立。

设 (6.25) 不成立。对每个  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  应用命题 4.6, 再撤销  $\phi_{T_\rho}$  的重标度, 得到  $\mathbb{T}[T_\rho]$  的一个精化 (仍记为  $\mathbb{T}[T_\rho]$ ), 以及包含在  $T_\rho$  中的一族  $s \times t \times 1$  棱柱  $\mathcal{U}_{T_\rho}$  (特别地  $t \leq \rho$ ), 它以  $\lesssim_\delta 1$  的误差关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下因子分解  $\mathbb{T}[T_\rho]$ , 且每个  $T \in \mathbb{T}[T_\rho]$  至多包含在  $\lesssim_\delta 1$  个  $U \in \mathcal{U}_{T_\rho}$  中。

对  $\mathbb{T}_\rho$  作鸽巢并精化, 使其仅包含满足  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}) > \delta^{-\zeta_2/2}$  的  $T_\rho$  (因 (6.25) 失败, 这样的精化存在), 并使对应的  $\mathcal{U}_{T_\rho}$  都与某个公共尺寸  $s \times t \times 1$  可比较。因此

$$|U| \lesssim_\delta \delta^{\zeta_2/2} |T_\rho|. \quad (6.26)$$

(当  $s \geq \tau$  时可与 (6.19) 比较; 当  $s \leq \tau$  时, 则由  $\tau \lesssim \delta^{\zeta_1/5} \delta_i \leq \delta^{\zeta_1/5} \rho$  得到。)

先假设  $s \geq \tau$ 。由注 4.3(A),  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\tau^U) \lesssim_\delta 1$ 。由 (6.24) 与  $C_{F-CW}(\mathbb{T}_\tau^{T_\rho}) > \delta^{-\zeta_2/2}$ ,

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau[T_\rho]) \geq \delta^{-\zeta_2/2+100\eta}. \quad (6.27)$$

因此由命题 4.6 的第 ii) 项,

$$\#(\mathbb{T}[T_\rho])[U] \gtrsim_\delta C_{KT-CW}(\mathbb{T}[T_\rho]) \left( \frac{|U|}{|T|} \right) \quad \text{对每个 } U \in \mathcal{U}_{T_\rho}.$$

由于  $s \geq \tau$  且  $\tau$  是容许尺度,

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}[T_\rho]) \gtrsim_\delta \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_\tau} \frac{|T|}{|T_\tau|} C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau[T_\rho]),$$

从而

$$\#(\mathbb{T}_\tau[T_\rho])[U] \gtrsim_\delta C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau[T_\rho]) \left( \frac{|U|}{|T_\tau|} \right) \geq \delta^{-\zeta_2/2+100\eta} \left( \frac{|U|}{|T_\tau|} \right) \quad \text{对每个 } U \in \mathcal{U}_{T_\rho}. \quad (6.28)$$

我们将证明

$$s < \delta^{\zeta_2/100} t. \quad (6.29)$$

反设  $s \geq \delta^{\zeta_2/100} t$ 。则  $t \leq \delta^{\zeta_2/4} \rho$ 。由 (6.28) 及每根  $\mathbb{T}_\tau[T_\rho]$  中的管至多包含在  $\lesssim_\delta 1$  个  $U \in \mathcal{U}_{T_\rho}$  中,

$$\#\mathcal{U}_{T_\rho} \lesssim_\delta \frac{\#\mathbb{T}_\tau[T_\rho]}{\inf_{U \in \mathcal{U}_{T_\rho}} \#(\mathbb{T}_\tau[T_\rho])[U]} \lesssim_\delta \delta^{\zeta_2/2-100\eta} (\#\mathbb{T}_\tau[T_\rho]) \frac{|T_\tau|}{|U|} \leq \delta^{\frac{48}{100}\zeta_2} (\#\mathbb{T}_\tau[T_\rho]) \left( \frac{\tau}{t} \right)^2,$$

若  $t'$  为不小于  $t$  的最小容许尺度, 则

$$\#\mathbb{T}_{t'} \leq \# \left( \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} \mathcal{U}_{T_\rho} \right) \lesssim_\delta \delta^{\frac{48}{100}\zeta_2} (\#\mathbb{T}_\tau) \left( \frac{\tau}{t} \right)^2 \leq \delta^{\frac{47}{100}\zeta_2} (\#\mathbb{T}_\tau) \left( \frac{\tau}{t'} \right)^2. \quad (6.30)$$

由 (6.30) 可知  $t' \geq \delta_i$ 。否则存在  $t'$ -管  $T_{t'}$ , 满足  $\#\mathbb{T}_\tau[T_{t'}] \gtrsim_\delta \delta^{-\frac{47}{100}\zeta_2} \frac{|T_{t'}|}{|T_\tau|}$ , 且该  $t'$ -管包含在某个  $\delta_i$ -管中, 这会违反 (6.22)。

比较 (6.30) 与 (6.23), 可见  $t' \in [t, \delta^{\zeta_2/5} \rho] \subset [\delta_i, \delta^{\zeta_2/5} \rho]$  是一个满足 (6.24) 的容许尺度, 与  $\rho$  的最小性矛盾。因此 (6.29) 必成立。

当 (6.29) 成立时, 我们恰好回到步骤 3 开头的情形: 扁平棱柱族  $\mathcal{U} = \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho} \mathcal{U}_{T_\rho}$  扮演  $\mathcal{W}$  的角色, 而本质不同的  $\rho$ -管族  $\mathbb{T}_\rho$  扮演  $\mathbb{T}_{\delta_i}$  的角色。采用完全相同、数值关系相同 (至多差无害的  $\delta^\eta$  因子) 的论证, 即得命题 6.3 的结论 (C)。

现在设 (6.29) 不成立, 即  $\delta^{\zeta_2/100}t \leq s < \tau$ 。若  $s \geq \tau\delta^{\zeta_2/20}$ , 结合  $s \geq \delta^{\zeta_2/100}t$ ,

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\tau[T_\rho]) \leq \delta^{-\zeta_2/4} C_{KT-CW}(\mathcal{U}_{T_\rho}) \lesssim_\delta \delta^{-\zeta_2/4},$$

这与 (6.27) 矛盾。因此可假设  $s \leq \tau\delta^{\zeta_2/20}$  且  $s \geq \delta^{\zeta_2/100}t$ 。此时我们又处于步骤 4 开头的同一情形, 只需用  $(s, t)$  替代  $(a, b)$ 、用  $\mathcal{U}$  替代  $\mathcal{W}$ 、用  $\mathbb{T}_\rho$  替代  $\mathbb{T}_{\delta_i}$ 。此外还有附加条件  $s/\rho \leq \delta^{\zeta_2/20}\tau/\delta_i$ , 说明  $\mathcal{U}$  中的棱柱比  $\mathcal{W}$  中的棱柱显著更扁平。于是回到步骤 4 开头重复论证; 不断迭代, 直到结论 (B) 或 (C) 成立。该过程至多迭代  $20/\zeta_2$  次。注意每次迭代都会诱导  $\mathbb{T}$  等的一个  $\approx_\delta 1$  精化, 但总迭代次数至多为  $20/\zeta_2$ , 所以这种精化是无害的。

## 7 $\mathbb{R}^3$ 中管族的双尺度颗粒分解

Katz、Łaba 与 Tao 在 [16] 中证明: 由一个 (假想的) 上 Minkowski 维数为  $5/2$  的挂谷集离散化所产生的  $\mathbb{R}^3$  中  $\delta$ -管并集, 都可以写成尺寸约为  $\delta \times \delta^{1/2} \times \delta^{1/2}$  的“颗粒” (即长方棱柱) 之并。Guth 在 [9] 中推广了这一结果, 证明满足某种宽广性假设的任意  $\mathbb{R}^3$  中  $\delta$ -管并集, 都可以写成尺寸约为  $\delta \times t \times t$  的颗粒之并, 其中直径  $t$  与管的数量及其并集体积有关。

本节旨在证明一个关于  $\mathbb{R}^3$  中  $\delta$ -管并集的结构性结论, 其精神与上述 Katz–Łaba–Tao 和 Guth 的结果相同, 即下面的命题 7.5。如引言所述, 命题 7.5 是证明命题 1.7 的关键一步: 它帮助我们找出可应用断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  的正确尺度与凸集排列。

简而言之, 命题 7.5 考察如下过程: 先用  $\rho$ -管覆盖一族  $\delta$ -管; 在每个重标度后的  $\rho$ -管内部应用 Guth 颗粒定理的一个变体; 然后分析来自不同  $\rho$ -管内部  $\delta$ -管所产生颗粒之间的相互作用。命题的具体假设和结论较为技术化, 它们是为了配合第 9 节中的论证而设计的。为陈述命题 7.5, 先给出若干定义。

定义 7.1. 设  $\lambda > 0$ ,  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$ , 且  $\delta \leq a \leq b \leq c$ ,  $\rho = b/c$ 。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族  $\delta$ -管及其着色,  $\mathbb{T}_\rho$  为  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖。若下述条件成立, 则称  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  关于 (wrt)  $\mathbb{T}_\rho$  的一个稳健的  $\lambda$ -稠密双尺度颗粒分解:

(i) 对每个  $P \in \mathcal{P}$ , 存在唯一的  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 满足  $P \subset T_\rho$  且  $\angle(\text{dir}(P), \text{dir}(T_\rho)) \leq 2\rho$ 。由此诱导分割  $\mathcal{P} = \bigsqcup_{T_\rho} \mathcal{P}_{T_\rho}$ 。

(ii) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 集合  $\{Y(P) : P \in \mathcal{P}_{T_\rho}\}$  两两不交, 并且

$$\bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} Y(T) = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}_{T_\rho}} Y(P). \quad (7.1)$$

(iii)  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  为  $\lambda$ -稠密的; 并且存在数  $\mu$ , 使对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  与每个  $x \in (7.1)$ , 都有  $\#\mathbb{T}[T_\rho]_Y(x) \sim \mu$ 。

(iv) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 以及每一对满足  $T \in \mathbb{T}[T_\rho]$ 、 $P \in \mathcal{P}_{T_\rho}$  且  $Y(T) \cap Y(P) \neq \emptyset$  的  $T, P$ , 管  $T$  都从  $P$  的“长端”离开 (见图 9), 并且  $Y(T) \cap P \subset Y(P)$ 。

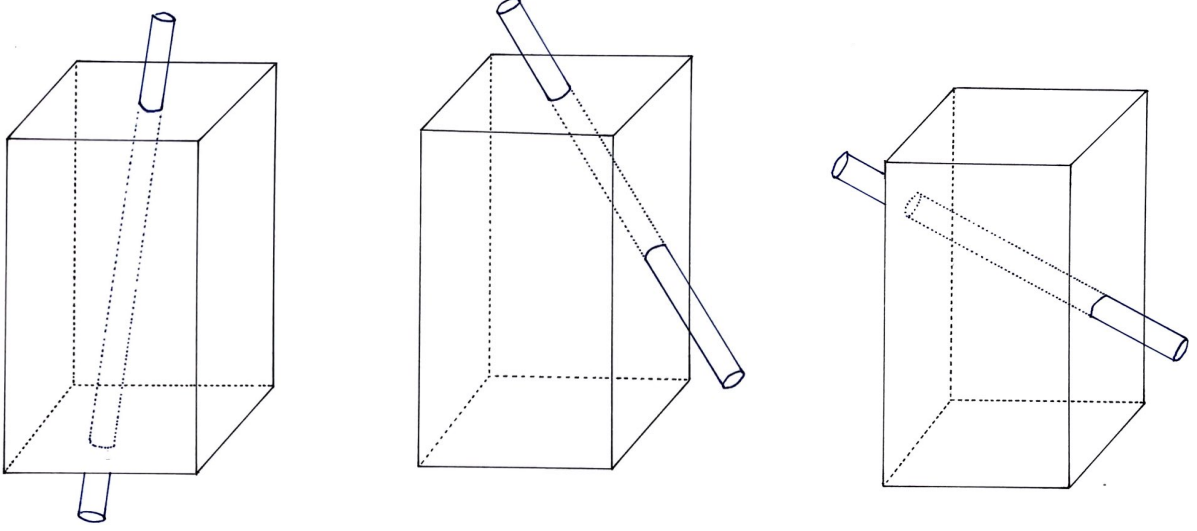


图 9: 一根管从颗粒的长端离开 (左) 以及未能如此离开的情形 (中、右)。

注 7.2. 结论 (iv) 蕴含  $a \geq 2\delta$ 。通常我们关注  $a \sim \delta$  的情形，但有时取更大的  $a$  也很有用。

定义 7.3. 设  $P$  为一个  $a \times b \times c$  棱柱。定义  $\square(P)$  为包含  $P$ 、且与  $P$  有相同中心和法向方向的  $\frac{ac}{b} \times c \times c$  棱柱 (后一个条件意味着  $\Pi(P) = \Pi(\square(P))$ )。注意  $\Pi(P)$  与  $\Pi(\square(P))$  都只在精度  $a/b$  内有定义。

设  $\mathcal{P}$  为一族  $a \times b \times c$  棱柱， $W$  为凸集。定义

$$\mathcal{P}\langle W \rangle = \{P \in \mathcal{P} : \square(P) \subset W\}.$$

由于  $P \subset \square(P)$ ，有  $\mathcal{P}\langle W \rangle \subset \mathcal{P}[W]$ 。

注意，若  $P, P'$  是相交的  $a \times b \times c$  棱柱，并满足某个  $K \geq 1$  下  $\angle(\Pi(P), \Pi(P')) \leq K \frac{a}{b}$ ，则  $\square(P)$  与  $\square(P')$  的  $K$  倍加厚 (即具有相同中心、方向和切平面、尺寸为  $\frac{ac}{b} \times c \times c$  的棱柱) 在因子  $K$  内可比较。特别地，若  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是一族棱柱及其着色，且对所有满足  $Y(P) \cap Y(P') \neq \emptyset$  的  $P, P' \in \mathcal{P}$  都有  $\angle(\Pi(P), \Pi(P')) \leq K \frac{a}{b}$ ，则可以找到一族尺寸与  $K \frac{ac}{b} \times c \times c$  可比较的棱柱  $\mathcal{W}$ ，使每个  $P \in \mathcal{P}$  至少包含在一个、至多包含在  $O(1)$  个形如  $\mathcal{P}\langle W \rangle$  ( $W \in \mathcal{W}$ ) 的集合中。此外，集合族  $\{\bigcup_{P \in \mathcal{P}\langle W \rangle} Y(P) : W \in \mathcal{W}\}$  的重叠次数为  $O(1)$ 。

在下面的论证中，我们将在某个小  $\varepsilon > 0$  下利用上述观察，并取  $K \leq \delta^{-\varepsilon}$ 。由于将逐个分析  $\mathcal{P}\langle W \rangle$ ，我们关心的是  $C_{KT-CW}(\mathcal{P}\langle W \rangle)$ ，而不是可能大得多的  $C_{KT-CW}(\mathcal{P})$ 。每个  $W$  至多包含  $100K^{100}$  个本质不同的  $\square(P)$  型棱柱。因此若  $K$  不太大， $C_{KT-CW}(\mathcal{P}\langle W \rangle)$  可由  $\sup_P C_{KT-CW}(\mathcal{P}\langle 2\square(P) \rangle)$  控制，其中  $2\square(P)$  表示  $\square(P)$  的二倍膨胀。这启发如下定义。

定义 7.4. 设  $\mathcal{P}$  为一族  $a \times b \times c$  棱柱。定义

$$C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{P}) = \max_{P \in \mathcal{P}} C_{KT-CW}(\mathcal{P}\langle 2\square(P) \rangle).$$

有了这些定义，现在可以陈述第 7 节的主要结果。

**命题 7.5.** 设  $\omega > 0$ ,  $\sigma \in (0, 2/3]$ ,  $\zeta \in (0, \omega/1000)$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则存在  $\alpha, \eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$  下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密的, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则下列至少一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}.$$

(B) 存在:

- 数  $\rho$  与  $\delta \leq a \leq b \leq c \leq 1$ , 满足  $\rho = b/c$ ;
- $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\zeta$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ;
- 一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ ;
- 一对  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times b \times c}$

这些对象满足:

- (i)  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  为  $\delta^\zeta$ -稠密的,  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\zeta}$ , 且  $C_{F-SW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\zeta}$ ;
- (ii)  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}'$  的平衡分割覆盖, 并关于 *Frostman* 薄板 *Wolff* 公理以误差  $\delta^{-\zeta}$  从上、从下因子分解  $\mathbb{T}'$ ;
- (iii)  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  的一个稳健的  $\delta^\zeta$ -稠密双尺度颗粒分解;
- (iv) 
$$c \geq \delta^\zeta \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}_\delta}. \quad (7.2)$$
- (v)  $\delta^{1-\omega/100} \leq \rho \leq \delta^{\omega/100}$ ;
- (vi)  $C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{G}) \leq \delta^{-\zeta}$ 。

命题 7.5 的证明概览已在第 2.2 节给出。

**固定  $\omega$  与  $\sigma$ 。**在命题 7.5 的证明中,  $\omega > 0$ 、 $\sigma \in (0, 2/3]$  与  $\zeta > 0$  的值始终不变。为简化后续叙述, 固定  $\omega$ 、 $\sigma$ 、 $\zeta$ , 它们在第 7 与第 8 节中保持不变。因此某些定义（如定义宽广性的定义 7.6）会依赖这些量；预先固定后即可省略这种依赖。

如第 2.2 节所预告, 我们将关键地使用 Guth 的方法, 在每个重标度的  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  内找到颗粒分解。应用 Guth 技术要求管族满足一种“宽广性”条件。下面对此作说明。

## 7.1 宽广性

在下面的定义中, 固定  $\beta = \omega\zeta/100$ 。

定义 7.6. 设  $\delta > 0$ ,  $K \geq 1$ 。若对所有单位向量  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  与所有  $r \in [\delta, 1]$  都有

$$\#\{v \in \mathcal{V} : \angle(v, v_0) \leq r\} \leq Kr^\beta(\#\mathcal{V}).$$

则称  $\mathbb{R}^n$  中单位向量组成的多重集  $\mathcal{V} \subset S^{n-1}$  在尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K$  宽广。

更一般地, 设  $\mathcal{V}$  包含在  $S^{n-1}$  中半径为  $\rho$  的圆盘  $D$  内。若对所有单位向量  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  与所有  $r \in [\delta, \rho]$  都有

$$\#\{v \in \mathcal{V} : \angle(v, v_0) \leq r\} \leq K(r/\rho)^\beta(\#\mathcal{V}).$$

则称  $\mathcal{V}$  在  $D$  内、尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K$  宽广。

定义 7.7. 设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族管及其着色,  $\mathbb{T}_\rho$  为  $\mathbb{T}$  的一个覆盖。

- (A) 若对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$ , 单位向量集合  $\{\text{dir}(T) : x \in Y(T)\}$  都在尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K$  宽广, 则称  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  以误差  $K$  宽广。
- (B) 若对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $(\mathbb{T}^{T_\rho}, Y^{T_\rho})_{\delta/\rho}$  都以误差  $K$  宽广, 则称  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  关于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $K$  宽广。

下面的结果是“两端”约化的一个变体。一般而言, 一族单位向量  $\mathcal{V}$  未必能以小误差宽广; 但下一结果表明, 总可以找到某个  $\rho$ , 使每个局部化到  $\rho$ -圆盘内的部分宽广。精确陈述如下。

**引理 7.8.** 设  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{V}$  为  $\mathbb{R}^n$  中一族指向彼此  $\delta$ -分离方向的向量。则存在尺度  $\rho \in [\delta, 1]$ 、一族两两不交的半径  $\rho$  球  $\mathcal{B}$  ( $B \subset S^{n-1}$ ), 以及集合  $\mathcal{V}_B \subset \mathcal{V} \cap B$ , 使:

- (i) 每个  $\mathcal{V}_B$  的基数满足  $\gtrsim \rho^\beta(\#\mathcal{V})$ ;
- (ii)  $\mathcal{V}_B$  在  $B$  内、尺度  $\geq \delta$  上以误差 100 宽广;
- (iii)  $\bigcup_B \mathcal{V}_B \gtrsim (\log 1/\delta)^{-1}(\#\mathcal{V})$ 。

证明. 贪心构造递减集合列  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \dots$ 。对每个  $i \geq 1$ , 选择单位向量  $v_i$  与半径  $r_i \in [\delta, 1]$ , 使

$$r_i^{-\beta}(\#\mathcal{V}_{i-1} \cap B(v_i, r_i)). \quad (7.3)$$

最大。令  $\mathcal{W}_i = \mathcal{V}_{i-1} \cap B(v_i, r_i)$ ,  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i-1} \setminus B(v_i, 100r_i)$ 。注意  $\#(\mathcal{V}_{i-1} \cap B(v_i, 3r_i)) \leq 100^\beta(\#\mathcal{W}_i)$ 。不断进行, 直到  $\#\mathcal{V}_i \leq \frac{1}{2}\#\mathcal{V}$ 。

我们声称, 对每个指标  $i$ 、每个单位向量  $v$  与每个  $r \geq \delta$ ,

$$\#(\mathcal{W}_i \cap B(v, r)) \leq 100(r/r_i)^\beta(\#\mathcal{W}_i). \quad (7.4)$$

这将给出结论 (ii)。若 (7.4) 对某个  $(v, r)$  失败, 则与  $(v_i, r_i)$  在 (7.3) 中的极大性矛盾。

还要注意, 由于  $r_i = 1$  是  $r$  的一个合法选择,  $\#\mathcal{W}_i \geq r_i^\beta(\#\mathcal{V}_{i-1}) \geq \frac{1}{2}r_i^\beta(\#\mathcal{V})$ 。最后, 若  $r_i \leq r_j \leq 2r_i$ , 则球  $2B(v_i, r_i)$  与  $2B(v_j, r_j)$  必不相交。事实上, 不妨假设  $\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_j$  都非空。若  $i < j$ , 则  $B(v_j, r_j) \cap B(v_i, 100r_i)^c \neq \emptyset$ ; 若  $j < i$ , 则  $B(v_i, r_i) \cap B(v_j, 100r_j)^c \neq \emptyset$ 。结合  $r_i \leq r_j \leq 2r_i$  即得  $2B(v_i, r_i) \cap 2B(v_j, r_j) = \emptyset$ 。

最后通过二进鸽巢选取尺度  $\rho \in [\delta, 1]$ , 使  $\#\bigcup_{i: \rho/2 \leq r_i \leq \rho} \mathcal{W}_i \gtrsim (\log 1/\delta)^{-1}(\#\mathcal{V})$ 。这给出两两不交的球族  $\mathcal{B}$  (把每个  $B(v_i, r_i)$  替换为  $B(v_i, \rho)$  是无害的; 由上面观察, 这些球仍不相交)。□

注 7.9. 引理 7.8 与标准的“两端”宽广性约化相似。不过标准做法通常只把  $\mathcal{V}$  替换为某一个  $\rho$ -球  $B$  中的  $\mathcal{V} \cap B$ , 所得集合基数仅为  $\gtrsim \rho^\beta(\#\mathcal{V})$ 。在我们的应用中, 这会造成不可接受的基数损失。

**推论 7.10.** 设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族  $\delta$ -管及其着色。则存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ 、尺度  $\rho \in [\delta, 1]$ , 以及  $(\mathbb{T}', Y')$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\rho$ , 使:

- (i) 每个  $x \in \mathbb{R}^3$  至多包含在  $\lesssim_\delta \rho^{-\beta}$  个形如  $\bigcup_{T' \in \mathbb{T}_\rho} Y'(T')$ 、 $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  的集合中;
- (ii)  $\mathbb{T}'$  关于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\approx_\delta 1$  宽广。

证明. 由二进鸽巢, 选取  $\mu \geq 1$  与  $(\mathbb{T}, Y)$  的一个  $(\log 1/\delta)^{-1}$  精化  $(\mathbb{T}, Y_1)_\delta$ , 使每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y_1(T)$  都满足  $\#\{T \in \mathbb{T}: x \in Y_1(T)\} \sim \mu$ 。对每个  $x \in \bigcup Y_1(T)$  应用引理 7.8, 得到尺度  $\rho_x \in [\delta, 1]$  与一族两两不交的  $\rho_x$  球  $\mathcal{B}_x \subset S^2$ 。进一步二进鸽巢可选取:

- 公共尺度  $\rho$ ;
- 重数  $\nu \geq 1$  与  $N \lesssim \rho^{-\beta}$ ;
- 一族  $S^2$  中的  $\rho$ -球  $\mathcal{B}$ , 其  $100\rho$  邻域两两不交;
- $(\mathbb{T}, Y_1)_\delta$  的一个  $\gtrsim (\log 1/\delta)^{-1}$  精化  $(\mathbb{T}, Y_2)_\delta$ 。

这些对象可使如下性质成立: 对每个  $x \in \bigcup_{\mathbb{T}} Y_2(T)$ , 单位向量集合  $\{\text{dir}(T): x \in Y_2(T)\} \subset S^2$  可由  $\mathcal{B}$  中  $N$  个球覆盖; 对每个这样的球  $B$ , 集合  $B \cap \{\text{dir}(T): x \in Y_2(T)\}$  的基数为  $\nu$ , 且在  $B$  内以  $O(1)$  的误差宽广。

再把  $\mathbb{T}$  精化一个  $\approx_\delta 1$  因子, 得到  $(\mathbb{T}, Y_2)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$ , 以及一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 使  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}_2$  的平衡分割覆盖, 而且凸集族  $\{3T_\rho: T_\rho \in \mathbb{T}_\rho\}$  也是  $\mathbb{T}_2$  的分割覆盖。因此对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $\mathbb{T}_2[T_\rho] = \mathbb{T}_2[3T_\rho]$ 。

对每个  $T \in \mathbb{T}_2$ , 若  $T \subset T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 定义

$$Y_3(T) = \{x \in Y_2(T): \#\{T' \in \mathbb{T}_2[T_\rho]: x \in Y_2(T')\} \geq \kappa_0 \nu\}.$$

由于  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$  是  $(\mathbb{T}, Y_2)_\delta$  的  $\approx_\delta 1$  精化, 若把  $\kappa_0 > 0$  取得足够小 (依赖于上文隐含常数), 则  $(\mathbb{T}_2, Y_3)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$  的  $\approx_\delta 1$  精化。并且对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}[3T_\rho]} Y_3(T) = \bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} Y_3(T)$ , 单位向量

集合  $\{\text{dir}(T): T \in \mathbb{T}_2[3T_\rho] = \mathbb{T}_2[T_\rho], x \in Y_3(T)\}$  在  $B(\text{dir}(T_\rho), 2\rho)$  内按定义 7.6 以  $O(1)$  误差宽广。因此  $(\mathbb{T}_2, Y_3)_\delta$  与  $\{3T_\rho: T_\rho \in \mathbb{T}_\rho\}$  满足推论 7.10 的结论 (用  $3\rho$  代替  $\rho$ )。□

下一结果说明, 每一对  $\delta$ -管及其着色  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  要么在某个尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$  上宽广, 要么其中的管几乎互不重叠。

**引理 7.11.** 设  $\delta > 0$ ,  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为一族  $\delta$ -管及其着色。则至少下列一个成立:

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim_\delta \delta^{\omega/2} \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|. \quad (7.5)$$

(B) 存在尺度  $\rho \in [\delta^{1-\omega/100}, \delta^{\omega/100}]$ ,  $(\mathbb{T}, Y)$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ , 以及  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\rho$ , 使  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $O(1)$  宽广。

证明. 令  $r = \delta^{\omega/100}$ . 把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  替换为一个  $\sim 1$  精化后, 可找到  $\mathbb{T}$  的分割覆盖  $\mathbb{T}_r$ . 对每个  $(\mathbb{T}^{T_r}, Y^{T_r})_{\delta/r}$  应用推论 7.10. 对  $\mathbb{T}_r$  与  $\mathbb{T}$  作二进鸽巢后, 可假设所得尺度 (记为  $\tilde{\rho}$ ) 对每个  $T_r \in \mathbb{T}_r$  都相同. 定义  $\rho = \tilde{\rho}r$ , 并令  $(\mathbb{T}', Y')$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的  $\approx_\delta 1$  精化, 由每个  $T_r$  中推论 7.10 给出的管及其着色组成。

$\mathbb{T}_r$  构成  $\mathbb{T}'$  的分割覆盖, 而对每个  $T_r \in \mathbb{T}_r$ , 推论给出的重标度  $\rho$ -管构成  $\mathbb{T}'[T_r]$  的分割覆盖。因此若令  $\mathbb{T}_\rho$  为这些  $\rho$ -管之并, 则  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}'$  的分割覆盖, 而且  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $O(1)$  宽广。

现在只差结论 (B) 的尺度范围: 目前只知  $\rho \in [\delta, \delta^{\omega/100}]$ , 尚未知道  $\rho \geq \delta^{1-\omega/100}$ . 下面证明若  $\rho < \delta^{1-\omega/100}$ , 则结论 (A) 成立。

由于  $\mathbb{T}_r$  中各管本质不同, 同一点至多通过  $O(r^{-2})$  根这样的管。由推论 7.10(i), 对每个  $T_r$  与每个  $x \in T_r$ ,

$$\#\{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho[T_r]: x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'[T_\rho]} Y'(T)\} \lesssim_\delta \rho^{-\beta} \leq \delta^{-\omega/100}.$$

回顾第 7.1 节开头固定了  $\beta = \omega\zeta/100$ 。

最后, 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ , 同一点至多通过  $(\rho/\delta)^2$  根  $\mathbb{T}'[T_\rho]$  中的管, 而同一点至多通过  $r^{-2}$  根不同的  $T_r \in \mathbb{T}_r$ . 因此

$$\#\mathbb{T}'_{Y'}(x) \lesssim \delta^{-\omega/100} \left(\frac{\rho}{\delta r}\right)^2 \quad \text{对每个 } x \in \mathbb{R}^3.$$

综上, 若  $\rho < \delta^{1-\omega/100}$ , 则结论 (A) 成立; 否则结论 (B) 成立。□

本节最后给出两个关于宽广向量集之并的结果。第一个是直接的: 宽广集的并仍然宽广。证明从略。

**引理 7.12.** 设  $\delta > 0$ ,  $B \subset S^{n-1}$  为一个圆盘,  $\mathcal{V}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 为  $B$  中的单位向量集合。若每个  $\mathcal{V}_i$  都在  $B$  内、尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K$  宽广, 则多重集  $\bigsqcup_{i=1}^N \mathcal{V}_i$  也在  $B$  内、尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K$  宽广。

第二个结果描述不同尺度上的宽广性如何组合。

**引理 7.13.** 设  $0 < \delta < \rho \leq 1$ 。设  $\mathcal{U}$  为  $\mathbb{R}^n$  中一族单位向量。对每个  $u \in \mathcal{U}$ ，设  $\mathcal{V}_u \subset B(u, \rho) \subset S^{n-1}$  包含在以  $u$  为中心、半径  $\rho$  的圆盘中。假设  $\mathcal{U}$  在尺度  $\geq \rho$  上以误差  $K_1$  宽广，而每个  $\mathcal{V}_u$  在  $B(u, \rho)$  内、尺度  $\geq \delta$  上以误差  $K_2$  宽广。再假设各  $\mathcal{V}_u$  的基数彼此可比较（至多相差因子 2）。则多重集  $\bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_u$  在尺度  $\geq \delta$  上以误差  $O(K_1 K_2)$  宽广。

证明. 令  $\mathcal{V} = \bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_u$ 。由假设, 存在  $M_1$ , 使对每个  $\mathcal{V}_u$  都有  $M_1 \leq \#\mathcal{V}_u \leq 2M_1$ 。令  $X = \sup_{u_0} \#\{u \in \mathcal{U}: \angle(u, u_0) \leq \rho\}$ , 下确界遍历所有单位向量  $u_0 \in S^{n-1}$ 。由于  $\mathcal{U}$  在尺度  $\geq \rho$  上以误差  $K_1$  宽广, 取达到上述上确界的  $u_0$ , 有

$$X \leq \#\{u \in \mathcal{U}: \angle(u, u_0) \leq \rho\} \leq K_1 \rho^\beta (\#\mathcal{U}),$$

因而  $\#\mathcal{U} \geq K_1^{-1} \rho^{-\beta} X$ 。

先考虑  $r \in [\delta, \rho]$ 。对每个单位向量  $v_0$ , 至多有  $O(X)$  个  $u \in \mathcal{U}$  使  $\{v \in \mathcal{V}_u: \angle(v, v_0) \leq r\}$  非空。对每个这样的  $u$ ,

$$\#\{v \in \mathcal{V}_u: \angle(v, v_0) \leq r\} \lesssim K_2 (r/\rho)^\beta (2M_1) \lesssim K_1 K_2 r^\beta (\#\mathcal{U}) X^{-1} M_1.$$

所有这类  $u$  的总贡献至多为  $\lesssim K_1 K_2 r^\beta (\#\mathcal{V})$ 。

再考虑  $r \in [\rho, 1]$ 。有

$$\#\{v \in \mathcal{V}: \angle(v, v_0) \leq r\} \lesssim 2M_1 (\#\{u \in \mathcal{U}: \angle(u, v_0) \leq 2r\}) \leq M_1 K_1 r^\beta (\#\mathcal{U}) = K_1 r^\beta (\#\mathcal{V}). \quad \square$$

## 7.2 宽广性与 Frostman 薄板 Wolff 公理

给定一对  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 引理 7.11 允许我们找到一个集合  $\mathbb{T}_\rho$ , 使得各对  $(\mathbb{T}^{T_\rho}, Y^{T_\rho})_{\delta/\rho}$  都具有宽广性。下面的结果说明, 在适当假设下,  $\mathbb{T}_\rho$  将关于 Frostman 薄板 Wolff 公理对  $\mathbb{T}$  进行因子分解。精确表述如下。

**引理 7.14.** 假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立, 并令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\alpha, \eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。设  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的一个平衡覆盖, 并假设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。则下列结论至少有一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (7.6)$$

(B) 存在一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  以及集合  $\mathbb{T}'_\rho \subset \mathbb{T}_\rho$ , 使得  $\mathbb{T}'_\rho$  关于 Frostman 薄板 Wolff 公理, 以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  从上方和下方对  $\mathbb{T}'$  进行因子分解。

简述证明思路如下。我们在每个集合  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  内应用命题 4.8，用棱柱  $\mathcal{W}$  覆盖  $\mathbb{T}[T_\rho]$  中的管，使得每个集合  $\mathbb{T}^W$  都以较小误差满足 Frostman 薄板 Wolff 公理，并且来自不同棱柱的  $\mathbb{T}[T_\rho]$  中的管彼此不相互作用（即它们的着色几乎不相交）。每个棱柱  $W$  都包含在其对应的  $\rho$ -管  $T_\rho$  内。若  $W$  几乎与  $T_\rho$  一样大，则  $C_{F-SW}(\mathbb{T}^{T_\rho})$  必须几乎与  $C_{F-SW}(\mathbb{T}^W)$  一样小，而後者的量级约为 1。此时结论 (B) 成立。

反之，假设这些棱柱比  $T_\rho$  小得多；记其尺寸为  $s \times t \times 1$ ，其中  $\delta \leq s \leq t$ 。由于每个棱柱都包含在一根  $\rho$ -管中，我们还有  $t \leq \rho$ 。因此，当这些棱柱远小于  $\rho$ -管时，特别有  $s \ll \rho$ 。

接下来利用管族相对于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  的宽广性假设来证明  $t \sim \rho$ 。由于  $s \ll \rho$ ，这意味着这些棱柱是扁平的。具体而言，宽广性保证，通过一个典型公共点  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} Y(T)$  的典型一对管之间的夹角约为  $\rho$ 。这样一对管包含在同一个棱柱  $W$  中，因此  $W$  必须具有“宽度”  $\rho$ ；也就是说，每个  $W$  的尺寸约为  $s \times \rho \times 1$ 。

综上，在论证的这一阶段，每根  $\delta$ -管都包含在一个尺寸约为  $s \times \rho \times 1$ 、且  $s \ll \rho$  的扁平棱柱  $W$  中。此外，在一个典型点  $x \in Y(T)$  处，至少还有另一根  $\mathbb{T}$  中的管包含在同一个扁平棱柱  $W$  中，并且这第二根管以约为  $\rho$  的角度与  $T$  相交。因此，将  $T$  的发刷（即所有与  $T$  相交的管之并）限制在  $T$  的  $\frac{\rho}{s}\delta$ -邻域内时，它会填充一个尺寸约为  $\delta \times \frac{\rho}{s}\delta \times 1$  的长方薄板。这恰好属于引理 5.17 的适用情形；该引理说明  $\bigcup_{\mathbb{T}} Y(T)$  比估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  所预期的更大，于是结论 (A) 成立。下面给出细节。

引理 7.14 的证明。

**步骤 1.** 可以假设  $\rho \leq \delta^{\varepsilon/10}$ ；否则，选取一根至少包含  $\rho^4(\#\mathbb{T})$  根  $\mathbb{T}$  中管的  $\rho$ -管即可推出结论 (B)。同样可以假设  $\rho \geq \delta^{\varepsilon/10}$ ；否则取  $\mathbb{T}' = \mathbb{T}$ 、 $\mathbb{T}'_\rho = \mathbb{T}_\rho$ ，结论 (B) 平凡成立。

通过抽屉原理并将  $\mathbb{T}_\rho$  替换为子集  $\mathbb{T}_{\rho,1}$ ，可以找到  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ ，使得  $\mathbb{T}_{\rho,1}$  是  $\mathbb{T}_1$  的平衡覆盖，并且每个  $(\mathbb{T}_1^{T_\rho}, Y_\rho)_{\delta/\rho}$  都是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta \gtrsim_\rho \rho^{10\eta/\varepsilon}$ -稠密的。

令  $\varepsilon_1 = \varepsilon\beta/1600$ 。对每个集合  $\mathbb{T}_1^{T_\rho}$ ，在命题 4.8 中以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ 。得到一族凸集  $\mathcal{W}_{T_\rho}$ ，它关于 Frostman 薄板 Wolff 公理，以误差  $(\delta/\rho)^{-\varepsilon_1} \leq \delta^{-\varepsilon_1}$  从下方对  $\mathbb{T}_1^{T_\rho}$  的一个  $(\delta/\rho)^{\varepsilon_1}$  比例进行因子分解。滥用记号，我们仍以  $\mathbb{T}_1^{T_\rho}$  表示这一比例的子族。只要选取  $\eta > 0$  足够小（依赖于  $\varepsilon$  和  $\varepsilon_1$ ），即可完成上述操作。

再作一次抽屉化（它诱导  $(\mathbb{T}_1, Y_1)$  的进一步  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$ ，并将  $\mathbb{T}_{\rho,1}$  替换为子集  $\mathbb{T}_{\rho,2}$ ），可假设对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$ ， $\phi_{T_\rho}^{-1}(\mathcal{W}_{T_\rho})$  中的凸集具有相同尺寸（至多相差因子 2）；记这些尺寸为  $s \times t \times 1$ 。还可假设，对所有  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$ ， $C_{F-SW}(\mathbb{T}_2^{T_\rho})$  的值彼此相同（至多相差因子 2），且每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$  的质量  $\sum_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} |Y_2(T)|$  也彼此相同（至多相差因子 2）。

令  $\mathcal{W} = \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}} \phi_{T_\rho}^{-1}(\mathcal{W}_{T_\rho})$ 。于是当前情形概括如下：

- (i) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$ ，有  $\sum_{T \in \mathbb{T}_2[T_\rho]} |Y_2(T)| \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1} \sum_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} |Y(T)|$ 。
- (ii) 有一族尺寸为  $s \times t \times 1$  的凸集  $\mathcal{W}$ ，且  $\mathbb{T}_2 \prec \mathcal{W} \prec \mathbb{T}_{\rho,2}$ 。
- (iii) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$ ，集合  $\bigcup_{W \in \mathcal{W}[T_\rho]} Y_2(T)$ ， $W \in \mathcal{W}[T_\rho]$  两两不交。

(iv) 对每个  $W \in \mathcal{W}$ , 有  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_2^W) \leq \delta^{-\varepsilon_1}$ 。

由 (ii) 和 (iv), 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  有

$$C_{F-SW}(\mathbb{T}_2^{T_\rho}) \leq \left( \sup_{W \in \mathcal{W}[T_\rho]} C_{F-SW}(\mathbb{T}_2^W) \right) \left( \frac{|T_\rho|}{|W|} \right)^{100} \leq \delta^{-\varepsilon/2} \left( \frac{|T_\rho|}{|W|} \right)^{100}. \quad (7.7)$$

上式最后一项有意采用了一个很粗糙的估计, 用来控制一根  $\rho$ -管内能够容纳的本质不同  $s \times t \times 1$  棱柱的数量。

若  $\left( \frac{|T_\rho|}{|W|} \right)^{100} \leq \delta^{-\varepsilon/2}$ , 则取  $(\mathbb{T}', Y')_\delta = (\mathbb{T}_2, Y_2)$  与  $\mathbb{T}_\rho = \mathbb{T}_{\rho,2}$  即得结论 (B), 证明结束。

**步骤 2.** 以下假设

$$|W| \leq \delta^{\varepsilon/200} |T_\rho|. \quad (7.8)$$

目标是对适当的  $\alpha$  证明 (7.6)。

$\mathcal{W}$  中每个棱柱的尺寸为  $s \times t \times 1$ , 且  $t \leq \rho$ 。我们声称反向不等式几乎成立。具体地,

$$t \gtrsim_\delta \delta^{\frac{2\varepsilon_1}{\beta}} \rho. \quad (7.9)$$

回忆定义 7.7: 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_{\rho,2}$  及每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\rho]} Y(T)$ , 都有

$$\#\{T \in \mathbb{T}[T_\rho]: x \in Y(T), \angle(v, \text{dir}(T)) \leq r\} \leq \delta^{-\eta} \left( \frac{r}{\rho} \right)^\beta \#\{T \in \mathbb{T}[T_\rho]: x \in Y(T)\}, \quad v \in S^2, r \geq \delta. \quad (7.10)$$

由上面的 (i), 至少存在一点  $x \in \mathbb{R}^3$ , 使得

$$\#\{T \in \mathbb{T}_2[T_\rho]: x \in Y_2(T)\} \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1} \#\{T \in \mathbb{T}[T_\rho]: x \in Y(T)\} > 0, \quad (7.11)$$

因此对这个  $x$  有

$$\#\{T \in \mathbb{T}_2[T_\rho]: x \in Y_2(T), \angle(v, \text{dir}(T)) \leq r\} \leq \delta^{-\eta-\varepsilon_1} \left( \frac{r}{\rho} \right)^\beta \#\{T \in \mathbb{T}_2[T_\rho]: x \in Y_2(T)\}, \quad v \in S^2, r \geq \delta. \quad (7.12)$$

另一方面, 由上面的 (iii), 所有管  $\{T \in \mathbb{T}_2[T_\rho]: x \in Y_2(T)\}$  都包含在同一个棱柱  $W \in \mathcal{W}$  中, 因此它们与该棱柱方向  $v$  的夹角均至多为  $2t$ 。在 (7.12) 中取  $r = 2t$  并与 (iii) 比较, 即得 (7.9) (只需选择  $\eta \leq \varepsilon_1$ )。

比较 (7.8) 与 (7.9), 可知  $\mathcal{W}$  中的棱柱必为扁平棱柱, 即

$$s \sim t^{-1} |W| \lesssim t^{-1} \delta^{\varepsilon/200} \rho^2 \lesssim_\delta \delta^{\frac{\varepsilon}{200} - \frac{4\varepsilon_1}{\beta}} t \leq \delta^{\frac{\varepsilon}{400}} t. \quad (7.13)$$

**步骤 3.** 应用引理 5.9, 将每个着色  $Y_2(T)$  ( $T \in \mathbb{T}_2$ ) 替换为一个正则子着色  $Y_3(T) \subset Y_2(T)$ 。令  $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}_2$ 。若点  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$  满足

$$\#\{T \in \mathbb{T}_3: x \in Y_3(T)\} \geq \kappa_0 \delta^{2\varepsilon_1} \#\{T \in \mathbb{T}: x \in Y(T)\}.$$

则称  $x$  存活。令  $Y_4(T) \subset Y_3(T)$  由所有存活点组成，并令  $\mathbb{T}_4 = \mathbb{T}_3$ 。我们把常数  $\kappa_0$  取得足够小，使  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_\delta$  成为  $(\mathbb{T}_3, Y_3)$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1}$  精化。

注意，若点  $x$  存活，则存在唯一棱柱  $W \in \mathcal{W}$ ，使  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_3[W]} Y(T)$ ；并且至少存在两根管  $T, T' \in \mathbb{T}_3[W]$ ，满足  $x \in Y_3(T)$ 、 $x \in Y_3(T')$  且  $\angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T')) \gtrsim_\delta \delta^{\frac{2\varepsilon_1}{\beta}} \rho_0$ 。

对每个  $T \in \mathbb{T}_4$ ，令  $S(T) \supset T$  为尺寸  $\delta \times \frac{t}{s}\delta \times 1$  的棱柱，其轴线与  $T$  共轴，所在平面平行于  $\Pi(W)$ ；其中  $W \in \mathcal{W}$  是覆盖  $T$  的唯一棱柱。由 (7.13)，有  $\frac{t}{s}\delta \geq \delta^{1-\frac{\varepsilon}{400}}$ 。

一个 Córdoba 型  $L^2$  论证（参见引理 5.7 及其证明中的类似论证）表明，对每个  $T \in \mathbb{T}_4$ ，

$$\left| S(T) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_3} Y_3(T) \right| \gtrsim_\delta \delta^{4\varepsilon_1} \frac{|Y_4(T)|}{|T|} |S|.$$

令  $b = \frac{t}{s}\delta \geq \delta^{1-\varepsilon/400}$ 。应用引理 5.17，并取  $\alpha = \varepsilon\omega/500$ ，只要  $\eta > 0$  选得足够小，即得结论 (A)。□

### 7.3 迭代的基始情形：Guth 颗粒分解

在第 2.2 节的证明梗概中，我们介绍了 Guth 给出的单尺度颗粒分解。本节给出其精确表述。

**命题 7.15.** 令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\eta, \kappa > 0$ ，使得对所有  $\delta > 0$ ，下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密，并以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。假设  $\mathbb{T}$  中的管都包含在同一根 1-管  $T_1$  内。

则存在一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')$ ，它是  $\delta^\varepsilon$ -稠密且以误差  $\leq \kappa^{-1}\delta^{-\varepsilon}$  宽广；并存在一个数  $\mu \geq 1$ ，使得对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T)$  都有  $\mu \sim \#\mathbb{T}'_{Y'}(x)$ 。此外，存在  $c \geq \kappa\mu\delta^\varepsilon(\delta\#\mathbb{T})^{-1}$  以及一对  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$ ，使  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\{T_1\}$  的鲁棒  $\delta^\varepsilon$ -稠密双尺度颗粒分解（后者仅由一根 1-管组成）。

注 7.16. 命题 7.15 说明  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\{T_1\}$  的双尺度颗粒分解。双尺度颗粒分解定义见定义 7.1；其中第 (iv) 项规定，如果  $Y'(T) \cap Y(G) \neq \emptyset$ ，则  $T$  从  $G$  的长端退出，如图 9 所示。由于命题 7.15 中的颗粒  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$  是方形的，该定义在此略有歧义。不过，命题 7.15 仅用于证明推论 7.17。因此，应把 1-管  $T_1$  看成某根  $\rho$ -管  $T_\rho$  经各向异性重标度后的像。真正需要的是：在把  $T_1$  映到  $T_\rho$  的各向异性缩放下， $\mathbb{T}'$  中管的像必须从  $\mathcal{G}$  中颗粒之像的长端退出。

命题 7.15 是 Guth 在 [9] 中颗粒分解的一个变体。由于这一精确表述并未直接出现在 [9] 中 ([9] 的假设写法略有不同)，我们将在附录 A 中给出证明。

若  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$  宽广，则可对每个重标度集合  $(\mathbb{T}^{T_\rho}, Y^{T_\rho})_\delta$  应用命题 7.15。

**推论 7.17.** 令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\kappa, \eta > 0$ ，使得对所有  $\delta > 0$ ，下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密， $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的一个平衡分割覆盖。假设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广，并且  $|\bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)| \leq \delta^\varepsilon(\#\mathbb{T})|T|$ 。

则存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ，它是  $\delta^\varepsilon$ -稠密；存在子集  $\mathbb{T}'_\rho \subset \mathbb{T}_\rho$ ；存在一个数  $c \gtrsim \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}}$ ；并存在一对  $(\mathcal{P}, Y)_{\delta \times b \times c}$ ，其中  $\rho = b/c$ ，使其成为  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}'_\rho$  的鲁棒  $\delta^\varepsilon$ -稠密双尺度颗粒分解。最后， $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于覆盖  $\mathbb{T}'_\rho$  以误差  $\leq \kappa^{-1}\delta^{-\varepsilon}$  宽广。

注意, 推论 7.17 对  $c$  的大小估计中省略了因子  $\mu$  (尽管命题 7.15 中用该因子补偿  $\delta^\varepsilon$  的损失); 这是因为后续论证中较弱估计  $c \gtrsim \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}}$  已经足够。

推论 7.17 有两个重要推论。第一, 与引理 7.11 结合后, 它说明: 若  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  是使  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  几乎取等的排列, 则  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  具有双尺度颗粒分解。在第 2.2 节中, 我们称之为  $\mathbb{T}$  的“Guth 颗粒分解”。精确陈述如下。

**引理 7.18.** 假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立, 并令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\alpha, \eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则下列结论至少有一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (7.14)$$

(C) 存在以下对象:

- 一个尺度  $\rho \in [\delta^{1-\omega/100}, \delta^{\omega/100}]$ ;
- $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ;
- $\mathbb{T}'$  的一个平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\rho$ ;
- 数  $\delta \leq b \leq c$ , 满足  $b/c = \rho$  且  $c \gtrsim \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}}$ ;
- 一对  $(\mathcal{P}, Y)_{\delta \times b \times c}$

并且满足:

- (i)  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于覆盖  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\leq \delta^{-\varepsilon}$  宽广;
- (ii)  $(\mathcal{P}, Y)_{\delta \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  的鲁棒  $\delta^\varepsilon$ -稠密双尺度颗粒分解。

注 7.19. 注意, 引理 7.18 的结论标为 (A) 与 (C), 而不是 (A) 与 (B)。采用这一约定, 是为了与下面操作 #1、#2、#3 的结论 (A)、(B)、(C) 保持平行。

引理 7.18 将作为第 2.2 节所述迭代过程的起点。在以下各小节中, 我们将介绍这一迭代过程中的三个操作。

## 7.4 操作 #1、#2、#3: 平行结构

在下面几节中, 我们将描述三个操作, 并把它们反复应用于由引理 7.18 得到的双尺度颗粒分解。每个操作都表述为一个引理, 这三个引理具有相似的结构; 特别地, 它们的假设完全相同, 结论也具有相似形式。

**操作 #1、#2、#3 的共同设置：假设**

假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立，并令  $\varepsilon \in (0, \zeta/2]$ 。则存在  $\alpha, \eta, \kappa > 0$ ，使得对所有  $0 < \delta \leq 1$ 、 $\rho \geq \delta^{1-\omega/100}$ ，以及满足  $b/c = \rho$  的所有  $\delta \leq a \leq b \leq c$ ，下述结论成立。

设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密，且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。设  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的一个平衡分割覆盖，并假设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  的鲁棒  $\delta^\eta$ -稠密双尺度颗粒分解。

操作 #1、#2、#3 各自都有三种可能结论，记为 (A)、(B)、(C)。三种操作的结论 (A) 完全相同。

**操作 #1、#2、#3 的共同设置：结论 (A)。**

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (7.15)$$

不等式 (7.15) 中， $\kappa, \alpha > 0$  即上述**操作 #1、#2、#3 的共同设置：假设**中的量。

结论 (B) 在三个操作中并不完全相同，但有许多共同内容，如下所述。

**操作 #1、#2、#3 的共同设置：结论 (B)。**

存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  和  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  与  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$ ，以及集合  $\mathbb{T}'_\rho \subset \mathbb{T}_\rho$ ，满足：

- (i)  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  是  $\delta^\varepsilon$ -稠密，且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\varepsilon}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\varepsilon}$ 。
- (ii)  $\mathbb{T}'_\rho$  是  $\mathbb{T}'$  的一个平衡分割覆盖，并且  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于  $\mathbb{T}'_\rho$  以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  宽广。
- (iii)  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}'_\rho$  的鲁棒  $\delta^\varepsilon$ -稠密双尺度颗粒分解。
- (iv) 操作 #1、#2、#3 还分别具有该操作特有的附加结论。

结论 (C) 在三个操作中同样不完全相同，但也有许多共同内容。

**操作 #1、#2、#3 的共同设置：结论 (C)。**

存在以下对象：

- 数  $\tilde{\rho}$  与  $\tilde{a} \leq \tilde{b} \leq \tilde{c} \leq 1$ , 其中  $\tilde{\rho} = \tilde{b}/\tilde{c}$ ;
- $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ;
- 一族  $\tilde{\rho}$ -管  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ ;
- 一对  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{Y})_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times \tilde{c}^\circ}$

这些对象满足：

- (i)  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  是  $\delta^\varepsilon$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\varepsilon}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}') \leq \delta^{-\varepsilon}$ 。
- (ii)  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  是  $\mathbb{T}'$  的一个平衡分割覆盖, 并且  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  宽广。
- (iii)  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{Y})_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times \tilde{c}}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  的鲁棒  $\delta^\varepsilon$ -稠密双尺度颗粒分解。
- (iv)  $\delta^{1-\omega/100} \leq \tilde{\rho} \leq 1$ 。
- (v) 操作 #1、#2、#3 还分别具有该操作特有的附加结论。

注 7.20. 注意, 结论 (B) 的 (i)、(ii)、(iii) (相应地, 结论 (C) 的 (i)–(iv)) 说明操作 #1、#2、#3 的输出  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ 、 $\mathbb{T}'_\rho$  与  $(\mathcal{P}', Y')_{\delta \times b \times c}$  (相应地,  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  与  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{Y})_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times \tilde{c}}$ ) 满足与“输入”假设 (即**操作 #1、#2、#3 的共同设置：假设**) 相同类型的条件, 只是指数  $\eta$  被弱化为  $\varepsilon$ 。因此我们可以反复应用这些操作。

## 7.5 利用操作 #1、#2、#3 证明命题 7.5

我们将在第 8 节陈述并证明操作 #1、#2、#3。不过, 利用上面说明的平行结构, 现在已经可以列出三个操作的假设和结论, 见下表。

| 操作 | 引理  | 结论 (B), 第 (iv) 项                                                               | 结论 (C), 第 (v) 项                                                                      |
|----|-----|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| #1 | 8.1 | $c \geq \delta^\zeta(\rho/\delta)$ ( $\#\mathbb{T}_\rho/\#\mathbb{T}_\delta$ ) | $\tilde{c} \geq \delta^{-\zeta}c$ , $\tilde{a} = \delta$ , and $\tilde{\rho} = \rho$ |
| #2 | 8.2 | $\rho \leq \delta^{\omega/100}$                                                | $\tilde{c} \geq \delta^{-\omega/100}c$                                               |
| #3 | 8.3 | $C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{P}') \leq \delta^{-\zeta}$                    | $\tilde{\rho} \geq \delta^{-\zeta/1000}\rho$ and $\tilde{c} \geq c$                  |

下面把命题 7.5 的各结论与操作 #1、#2、#3 中对应的结论逐一匹配。

- 操作 #1、#2、#3 的结论 (A) 与命题 7.5 的结论 (A) 相同。
- 三个操作的结论 (B) 中第 (i)、(iii) 项分别与命题 7.5 的结论 (B) 中第 (i)、(iii) 项相同。

- 三个操作的结论 (B) 第 (ii) 项结合引理 7.14, 要么推出结论 (A), 要么推出命题 7.5 的结论 (B) 第 (ii) 项。
- 操作 #1 的结论 (B) 第 (iv) 项与命题 7.5 的结论 (B) 第 (iv) 项相同。
- 操作 #2 的结论 (B) 第 (iv) 项结合假设  $\rho \geq \delta^{1-\omega/100}$ , 与命题 7.5 的结论 (B) 第 (v) 项相同。
- 操作 #3 的结论 (B) 第 (v) 项与命题 7.5 的结论 (B) 第 (vi) 项相同。

命题 7.5 的证明. 论证如下. 令  $\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N$  为稍后确定的一系列数. 设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^{\eta_0}$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta_0}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta_0}$ . 若  $\eta_0$  相对于  $\eta_1$  足够小, 则可在迭代的基始情形——引理 7.18——中以  $\eta_1$  代替  $\varepsilon$ . 若该引理的结论 (A) 成立, 则命题 7.5 的结论 (A) 成立, 证明结束。

反之, 假设引理 7.18 的结论 (B) 成立. 该结论的输出恰好给出了**操作 #1、#2、#3 的共同设置: 假设**所需的对象, 只需以  $\eta_1$  代替  $\eta$ 。

现在反复应用操作 #1、#2、#3. 在第  $j$  阶段以  $\eta_{j+1}$  代替  $\varepsilon$ ; 只要  $\eta_j$  相对于  $\eta_{j+1}$  足够小即可实施。

- 若任何阶段出现结论 (A), 则命题 7.5 的结论 (A) 成立, 迭代停止。
- 若对某个  $i = 1, 2, 3$ , 操作 #i 出现结论 (B), 则切换到另一个操作。
- 若三个操作依次都出现结论 (B), 则命题 7.5 结论 (B) 的第 (i)、(iii)、(iv) 项成立. 此时停止, 并应用引理 7.14: 它要么给出结论 (B) 第 (ii) 项, 要么给出结论 (A). 因此命题 7.5 的结论 (A) 或 (B) 至少有一个成立。
- 若操作 #i 出现结论 (C), 则以下至少一种情形发生:
  - $c$  不减, 而  $\rho$  增大因子  $\delta^{-\zeta/1000}$ ; 这种情形连续发生至多  $1000/\zeta$  次。
  - $c$  增大因子  $\min\{\delta^{-\zeta}, \delta^{-\omega/100}\}$ ; 这种情形总共至多发生  $1/\zeta + 100/\omega$  次。

因此上述迭代过程至多经过  $N = \frac{1000}{\zeta} \left( \frac{2}{\zeta} + \frac{100}{\omega} \right)$  步就必须停止. 我们先选取  $\eta_{N+1}$ , 然后依次选取  $\eta_N, \eta_{N-1}, \dots, \eta_0$ . 最后定义命题 7.5 中的  $\eta$  为  $\eta = \eta_0$ 。

所得精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ 、集合  $\mathbb{T}_\rho$  以及  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times b \times c}$  已满足命题 7.5 结论 (B) 的所有要求, 唯独第 (ii) 项尚未证明  $\mathbb{T}_\rho$  关于 Frostman 薄板 Wolff 公理以误差  $\delta^{-\zeta}$  从下方因子分解  $\mathbb{T}'$ . 不过, 由于  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  宽广, 可以应用引理 7.14, 从而要么确实得到这一性质 (在必要时用适当精化替换  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ 、 $\mathbb{T}_\rho$  与  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times b \times c}$ ), 要么得到命题 7.5 的结论 (A)。

命题 7.5 的证明至此完成, 唯一尚未证明的是操作 #1、#2、#3. 我们将在下一节完成.  $\square$

## 8 操作 #1、#2 与 #3

### 8.1 操作 #1：用更长的颗粒替换原颗粒，以保证 $c \geq \delta^{\zeta} \frac{\rho}{\delta} (\#\mathbb{T}_\rho) / (\#\mathbb{T})$

本节目标是陈述并证明操作 #1，参见第 2.2 节与第 7.4 节的描述。

**引理 8.1.** 我们采用第 7.4 节中操作 #1、#2、#3 的共同设置：**假设**。则下列结论至少有一个成立。

(A) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (A)。

(B) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (B)。此外，

$$(iv) \quad c \geq \delta^{\zeta} \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}}. \quad (8.1)$$

(C) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (C)。此外，

$$(v) \quad \tilde{a} = \delta, \tilde{\rho} = \rho, \text{ 且 } \tilde{c} \geq \delta^{-\zeta} c_0.$$

证明. 若结论 (B) 不成立，则舍弃覆盖  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$ ，并用对  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  和  $\mathbb{T}_\rho$  应用推论 7.17 所得到的覆盖替换它。引理 8.1 的结论 (C) 正是为匹配推论 7.17 的输出而设置的。注意，由推论 7.17 得到的棱柱长度满足  $\tilde{c} \geq \frac{\rho}{\delta} \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}}$ 。若结论 (B) 失败，则该量  $\geq \delta^{-\zeta} c$ ，如所需。  $\square$

### 8.2 操作 #2：用更长的颗粒替换方形颗粒

本节将使用具有 Córdoba 在  $\mathbb{R}^2$  中证明挂谷极大函数猜想之精神的几何论证，证明如下事实：若  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  具有由方形颗粒组成的双尺度颗粒分解，即颗粒尺寸为  $a \times b \times c$  且  $\rho = b/c > \delta^{\omega/100}$ ，那么要么  $\bigcup Y(T)$  很大，要么可以构造  $(\mathbb{T}, Y)$  的一个新的双尺度颗粒分解，其中颗粒显著更长。精确陈述如下。

**引理 8.2.** 我们采用第 7.4 节中操作 #1、#2、#3 的共同设置：**假设**。则下列结论至少有一个成立。

(A) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (A)。

(B) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (B)。此外，

$$(iv) \quad \rho \leq \delta^{\omega/100}.$$

(C) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (C)。此外，

$$(v) \quad \tilde{c} \geq \delta^{-\omega/100} c_0.$$

证明.

**步骤 1.** 令  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$  为稍后选取的小量。我们将令  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2$  很小,  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon$  很小, 而  $\alpha, \eta$  相对于  $\varepsilon_1$  很小。

首先声称, 要么

$$a \leq \delta^{1-\varepsilon_1}, \quad (8.2)$$

要么只要按  $\varepsilon_1$  选取  $\alpha$  与  $\eta$  足够小, 结论 (A) 立即成立。

证明该声称。若 (8.2) 不成立, 则用一个  $\approx_\delta 1$  精化替换  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  后, 对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$  有

$$\left| B(x, \delta^{1-\varepsilon_1}) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \delta^\eta |B(x, \delta^{1-\varepsilon_1})|.$$

由此可知 (见推论 5.19), 只要取  $\alpha \leq \omega \varepsilon_1 / 2$  并令  $\eta > 0$  足够小, 结论 (A) 即成立。以下假设 (8.2) 成立。

**步骤 2.** 我们将对集合  $\mathbb{T}$  作正则化。通过二进抽屉原理, 并以一个  $\gtrsim (\log 1/\delta)^{-1/\varepsilon_1}$  精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  替换  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 可假设:

- (i) 对每个形如  $\tau_i = \delta^{\varepsilon_1 i}$  的尺度 ( $i = 1, \dots, \varepsilon_1^{-1}$ ), 存在  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_{\tau_i}$  以及数  $\mu_i$ , 使得对每个  $T_{\tau_i} \in \mathbb{T}_{\tau_i}$  和每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_{\tau_i}]} Y_1(T)$ , 都有  $\#(\mathbb{T}_1[T_{\tau_i}])_{Y_1}(x) \sim \mu_i$ 。
- (ii) 存在数  $\mu_{\text{fine}}$ , 使得对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  与每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]} Y_1(T)$ , 有  $\#(\mathbb{T}_1[T_\rho]_{Y_1})(x) \sim \mu_{\text{fine}}$ 。
- (iii) 对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  与每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]} Y_1(T)$ , 有

$$(\# \mathbb{T}_1[T_\rho])_{Y_1}(x) \gtrsim (\log 1/\delta)^{-1/\varepsilon_1} (\# \mathbb{T}[T_\rho]_Y(x)).$$

第 (iii) 项蕴含  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-\eta}$  宽广。

由于  $\mathbb{T}_\rho$  中的管本质不同, 通过一个公共点的  $\mathbb{T}_\rho$  中的管至多有  $O(\rho^{-2})$  根。因此, 要么结论 (B) 成立, 要么

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \mu_{\text{fine}}^{-1} \rho^2 \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y_1(T)| \geq \delta^{\frac{\omega}{50} + \eta} \mu_{\text{fine}}^{-1} (\# \mathbb{T}) |T|.$$

若  $\mu_{\text{fine}}$  很小, 则结论 (A) 成立。更精确地, 若结论 (A) 不成立, 则

$$\mu_{\text{fine}} \geq \delta^{-\omega + \frac{\omega}{50} + 2\eta + \alpha} \left( (\# \mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^\sigma \geq \delta^{-\frac{24}{25}\omega}, \quad (8.3)$$

其中最后一个不等式使用了  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ , 从而  $(\# \mathbb{T}) |T|^{1/2} \geq \delta^\eta$ 。以下假设 (8.3) 成立。

**步骤 3.** 令  $\tilde{c} = \delta^{-\omega/100} c$ ; 稍后我们会略微滥用记号, 把  $\tilde{c}$  替换为  $K \delta^{-\omega/100} c$ , 其中  $1 \leq K \lesssim 1$ 。我们描述一个过程: 它找到一个尺寸为  $a \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}$  的棱柱  $\tilde{P}$ , 其中  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{P}) \in [\delta^{1-\omega/100}, \delta^{\omega/100}]$ , 并满足结论 (C) 中的若干性质。该过程示于图 10。步骤 4 将多次迭代此过程。

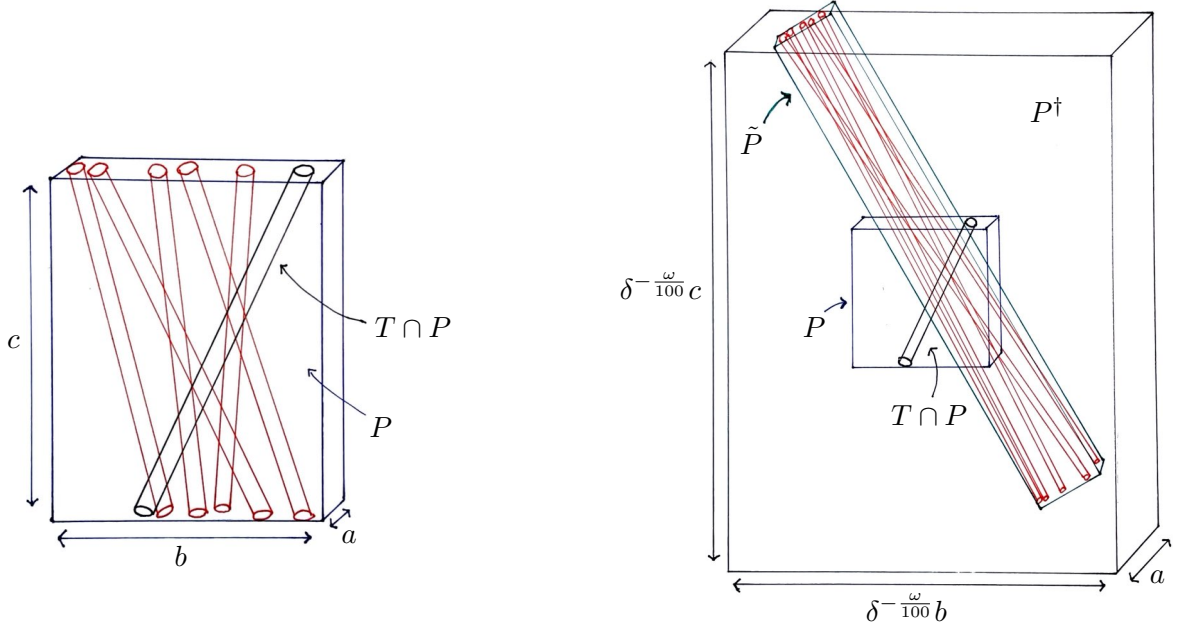


图 10: 寻找棱柱  $\tilde{P}$

回忆  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密。这意味着，对于一根典型的管以及一个典型点  $x \in Y_1(T)$ ，我们预期  $|B(x, \tilde{c}) \cap Y_1(T)|$  的大小为  $\gtrsim_\delta \delta^\eta \tilde{c} \delta^2$ 。对任何（足够稠密的）子着色  $Y'(T) \subset Y_1(T)$ ，也应有类似性质。下面的定义把这一启发式表述精确化：给定着色  $Y'(T) \subset T$ ，定义  $Y'_{\text{reg}}(T) \subset Y'(T)$  为满足下式的点  $x \in Y(T)$  的集合：

$$|B(x, \tilde{c}) \cap Y'(T)| \geq \frac{1}{100} \delta^{2\eta} \tilde{c} \delta^2, \quad (8.4)$$

即  $Y'_{\text{reg}}$  由在尺度  $\tilde{c}$  上密度至少为  $\delta^{2\eta}/100$  的点组成。注意，如果  $(\mathbb{T}_1, Y')_\delta$  为  $\delta^{2\eta}$ -稠密，则  $(\mathbb{T}, Y'_{\text{reg}})$  是  $(\mathbb{T}_1, Y')$  的一个  $\sim 1$  精化。

利用上述定义继续。设  $(\mathbb{T}_1, Y')_\delta$  为  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的任意精化，并满足  $\sum |Y'(T)| \geq \frac{1}{2} \sum |Y_1(T)|$ （因而特别地， $(\mathbb{T}_1, Y')_\delta$  是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密）。

我们声称，可以选取一根  $\rho$ -管  $T_\rho$ 、一根  $\delta$ -管  $T_{\text{stem}} \in \mathbb{T}_1[T_\rho]$ 、一个棱柱  $P \in \mathcal{P}_{T_\rho}$ （回忆定义 7.1 第 (i) 项）以及一个数  $\kappa \sim 1$ ，使集合

$$E = \{x \in Y'(T_{\text{stem}}) \cap Y(P) : \#\mathbb{T}_1[T_\rho]_{Y'_{\text{reg}}}(x) \geq \kappa \mu_{\text{fine}}\} \quad (8.5)$$

满足

$$|E| \gtrsim \delta^{2\eta} c \delta^2. \quad (8.6)$$

为验证该声称，暂时定义精化  $(\mathbb{T}_1, Y'')_\delta$ ：

$$Y''(T) = Y'(T) \cap \{x : \#\mathbb{T}_1[T_\rho]_{Y'_{\text{reg}}}(x) \geq \kappa \mu_{\text{fine}}\},$$

其中  $T_\rho$  是  $\mathbb{T}_\rho$  中包含  $T_{\text{stem}}$  的唯一一根  $\rho$ -管。若把  $\kappa \sim 1$  取得足够小, 则  $(\mathbb{T}_1, Y'')_\delta$  是  $(\mathbb{T}_1, Y')_\delta$  的一个  $1/2$  精化。通过抽屉原理, 可以选取一根管  $T_{\text{stem}}$  和一点  $x \in T_{\text{stem}}$ , 使得交集包含  $x$  的两个相邻管段  $T_{\text{seg}}^{(1)}, T_{\text{seg}}^{(2)}$  (长度均为  $c/10$ ; 见图 11 左图) 满足  $|Y''(T_{\text{stem}}) \cap T_{\text{seg}}^{(i)}| \gtrsim \delta^{2\eta} c \delta^2$ ,  $i = 1, 2$ 。接着选取  $P \in \mathcal{P}_{T_\rho}$ , 使  $x \in Y(P)$  (由定义 7.1 第 (ii) 项, 这样的  $P$  唯一)。由定义 7.1 第 (iv) 项, 至少一个管段  $T_{\text{seg}}^{(i)}$  必须几乎包含在  $P$  中, 即  $T_{\text{seg}}^{(i)} \setminus N_\delta(x) \subset P$  (见图 11 右图)。于是 (8.5) 中的集合  $E$  至少包含某个集合  $(Y''(T_{\text{stem}}) \cap T_{\text{seg}}^{(i)}) \setminus N_\delta(x)$ , 从而得到体积下界 (8.6)。

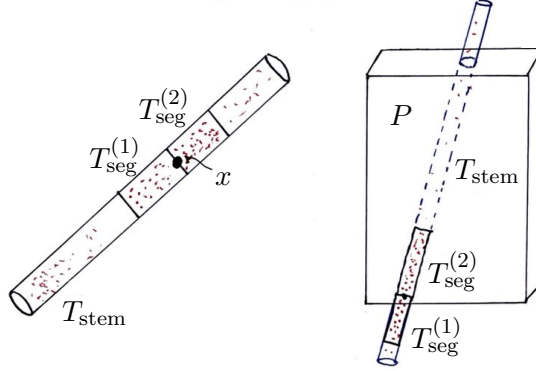


图 11: 左: 点  $x$  两侧的两个管段。两个管段都具有丰富的着色。

右: 由于  $x \in P$ , 并且  $T_{\text{stem}}$  从  $P$  的“长端”退出, 所以至少一个管段必须几乎包含在  $P$  中, 即  $T_{\text{seg}}^{(i)} \setminus N_\delta(x) \subset P$ 。

由于  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-\eta}$  宽广, 对每个  $x \in E$ , 有  $\gtrsim_\delta \mu_{\text{fine}}$  根管  $T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]_{Y'_{\text{reg}}}(x)$  满足  $\angle(T, T_{\text{stem}}) \gtrsim_\delta \delta^{\eta/\beta} \rho_0$ 。每根这样的管与  $T_{\text{stem}}$  的交集尺寸至多为  $\delta \times \delta \times \frac{\delta}{\delta^{\eta/\beta} \rho_0}$ 。因此存在集合  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T_{\text{stem}}) \subset \mathbb{T}_1[T_\rho]$ , 满足:

- $\#\mathcal{H} \gtrsim_\delta (\mu_{\text{fine}} \delta^{-1} c)(\delta^{\eta/\beta} \rho) \delta^{2\eta}$ 。
- 每个  $T \in \mathcal{H}$  都与  $P$  相交, 并从  $P$  的“长端”退出。
- 每个  $T \in \mathcal{H}$  都满足  $|B \cap Y'(T)| \gtrsim \delta^{2\eta} |B \cap T| \sim \delta^{2\eta} \tilde{c} \delta^2$ , 其中  $B$  是与  $P$  同心、半径为  $\tilde{c}$  的球。

第二项由定义 7.1 第 (iv) 项以及如下事实得到:  $T \in \mathcal{H}$  意味着  $T$  与  $P$  关联到同一根  $\rho$ -管, 且  $Y(T) \cap Y(P) \neq \emptyset$ 。第三项则来自 (8.5) 中集合  $E$  是相对于着色  $Y'_{\text{reg}}$  定义的 (回忆 (8.4))。

于是利用  $a \in [\delta, \delta^{1-\varepsilon_1}]$ 、 $\tilde{c} = c\delta^{-\omega/100}$  以及 (8.3), 有

$$\sum_{T \in \mathcal{H}} |B \cap Y'(T)| \gtrsim \left( \mu_{\text{fine}} \delta^{-1+2\eta+\eta/\beta} c \rho \right) \left( \delta^{2\eta} \tilde{c} \delta^2 \right) \gtrsim \mu_{\text{fine}} \delta^{\eta/\beta+4\eta+\omega/100+\varepsilon_1} (a \cdot \rho \tilde{c} \cdot \tilde{c}) \gtrsim \delta^{-\frac{1}{2}\omega} (a \cdot \rho \tilde{c} \cdot \tilde{c}),$$

其中  $B$  是与  $P$  同心、半径为  $\tilde{c}$  的球。为保证最后一个不等式成立, 取  $\eta \leq \beta\omega/100$  且  $\varepsilon_1 \leq \omega/100$ 。

我们声称, 通过抽屉原理, 可以选取一个包含  $P$  的棱柱  $P^\dagger$  (图 10 右侧的较大棱柱), 其尺寸

为  $2a \times 2\rho\tilde{c} \times \tilde{c}$ , 并满足

$$\sum_{\substack{T \in \mathcal{H} \\ T \text{ 经长端离开 } P^\dagger}} |P^\dagger \cap Y'(T)| \gtrsim \delta^{2\eta} \sum_{\substack{T \in \mathcal{H} \\ T \text{ 经长端离开 } P^\dagger}} |P^\dagger \cap T| \gtrsim \delta^{-\frac{1}{4}\omega} |P^\dagger|, \quad (8.7)$$

其中“ $T$  经长端离开  $P^\dagger$ ”表示  $T$  从  $P^\dagger$  的长端退出。

验证该声称。对每个  $T \in \mathcal{H}$ , 至少存在一个尺寸为  $a \times \rho\tilde{c} \times \tilde{c}$  的棱柱  $P^\dagger$ , 使  $T$  从  $P^\dagger$  的长端退出。另一方面, 包含  $P$  的本质不同  $a \times \rho\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱至多有  $\lesssim (\tilde{c}/c)^2 = \delta^{-\frac{1}{50}\omega}$  个。因此结论由抽屉原理得到。(注意, 若  $T$  从棱柱  $P_1^\dagger$  的长端退出, 且  $P_2^\dagger$  与  $P_1^\dagger$  可比较, 则  $T'$  从  $P_2^\dagger$  的二倍加厚棱柱的长端退出; 这里二倍加厚是把  $P_2^\dagger$  的两个较短尺寸各扩大 2 倍得到的棱柱。这就是为什么此步骤中棱柱尺寸变为  $2a \times 2\rho\tilde{c} \times \tilde{c}_0$ 。)

对集合  $\mathcal{H}$  及其着色  $P^\dagger \cap Y'(T)$  ( $T \in \mathcal{H}$ ) 应用推论 7.10 (寻找宽广尺度)。得到尺度  $\tilde{\rho} \in [\delta, 1]$ 、集合  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$  (每根  $T \in \mathcal{H}'$  都从  $P^\dagger$  的长端退出)、着色  $\{P^\dagger \cap Y'(T), T \in \mathcal{H}'\}$  的一个子着色 (记为  $Y_{P^\dagger}(T)$ ), 以及  $\mathcal{H}'$  的平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}^{\mathcal{H}}$ 。

注意  $Y_{P^\dagger}(T) \subset P^\dagger \cap Y'(T)$ , 后者包含在一个尺寸可与  $\delta \times \delta \times \tilde{c}$  比较的管段中。特别地,  $Y_{P^\dagger}(T)$  不是  $T$  的  $\delta^{O(\eta)}$ -稠密着色。不过, 推论 7.10 保证这些着色在  $T \cap P^\dagger$  内“相对”稠密, 因此

$$\sum_{T \in \mathcal{H}'} |Y_{P^\dagger}(T)| \gtrsim_{\delta} \delta^{2\eta} \tilde{c} \delta^2 (\#\mathcal{H}'). \quad (8.8)$$

此外, 若将 (8.7) 左端的着色  $P^\dagger \cap Y'(T)$  替换为  $Y_{P^\dagger}(T)$ , 并在右端再损失一个  $\approx_{\delta} 1$  因子, (8.7) 仍成立, 即

$$\sum_{T \in \mathcal{H}'} |Y_{P^\dagger}(T)| \gtrsim_{\delta} \delta^{-\frac{1}{4}\omega} |P^\dagger|. \quad (8.9)$$

我们声称

$$\tilde{\rho} \geq \delta^{1-\omega/100}. \quad (8.10)$$

验证如下。每个点  $x \in P^\dagger$  至多属于  $(\tilde{\rho}/\delta)^2 (\tilde{\rho})^{-2\beta}$  个着色  $\{Y_{P^\dagger}(T), T \in \mathcal{H}\}$ 。若 (8.10) 不成立, 则由 (8.9),

$$|P^\dagger| \geq \left| \bigcup_{T \in \mathcal{H}} P^\dagger \cap Y_{P^\dagger}(T) \right| \gtrsim_{\delta} \left( \left( \frac{\tilde{\rho}}{\delta} \right)^2 (\tilde{\rho})^{-2\beta} \right)^{-1} \left( \delta^{-\frac{1}{4}\omega} |P^\dagger| \right) \gtrsim \delta^{-\frac{1}{8}\omega} |P^\dagger|,$$

矛盾。最后一个不等式使用了  $\beta \leq \omega/100$ 。

由 (8.8) 与抽屉原理, 可选取  $T_1 \in \mathcal{H}'$ , 使  $|Y_{P^\dagger}(T_1)| \gtrsim_{\delta} \delta^{2\eta} \tilde{c} \delta^2$ 。令  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}^{\mathcal{H}}$  为满足  $T_1 \in \mathcal{H}'[T_{\tilde{\rho}}]$  的唯一  $\tilde{\rho}$ -管。对每个  $x \in Y_{P^\dagger}(T_1)$ , 集合  $\mathcal{H}'[T_{\tilde{\rho}}]_{Y_{P^\dagger}}(x)$  中管的方向在以  $\text{dir}(T_{\tilde{\rho}})$  为中心的  $\tilde{\rho}$ -帽内以误差  $\lesssim_{\delta} 1$  宽广。特别地, 这些管与  $P^\dagger$  的交都包含在  $P^\dagger \cap N_{\tilde{\rho}\tilde{c}}(T_1)$  中; 后者包含在一个  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱中, 记为  $\tilde{P}$ , 即图 10 中的绿色棱柱。由于每个  $T \in \mathcal{H}'$  从  $P^\dagger$  的长端退出, 上述每根  $T \in \mathcal{H}'[T_{\tilde{\rho}}]_{Y_{P^\dagger}}(x)$  也从  $\tilde{P}$  的长端退出。

应用标准 Córdoba 型  $L^2$  论证<sup>2</sup>。定义

$$\mathbb{T}_{\tilde{P}} = \{T \in \mathcal{H}'[T_{\tilde{\rho}}] : T \cap \tilde{P} \neq \emptyset, T \text{ 离开 } \tilde{P} \text{ 经其长端}\},$$

并定义着色  $Y_{\tilde{P}}(T) = Y_{P^\dagger}(T) \cap \tilde{P}$ 。则

$$Y(\tilde{P}) = \bigcup_{T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}} Y_{\tilde{P}}(T)$$

满足  $|Y(\tilde{P})| \gtrsim \delta^{4\eta+4\epsilon_1} |\tilde{P}|$  (其中  $\delta^{4\epsilon_1}$  的损失来自  $\tilde{P}$  不是  $\delta \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱, 而是  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱, 且  $a \in [\delta, \delta^{1-\epsilon_1}]$ )。此外, 对每个  $x \in Y(\tilde{P})$ , 单位向量集合  $\{\text{dir}(T) : T \in (\mathbb{T}_{\tilde{P}})_{Y_{\tilde{P}}}(x)\}$  在  $\tilde{\rho}$ -帽  $B(\text{dir}(\tilde{P}), \tilde{\rho})$  内以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。

**步骤 4.** 概括步骤 3。给定  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的一个精化  $(\mathbb{T}_1, Y')_\delta$ , 满足  $\sum |Y'(T)| \geq \frac{1}{2} \sum |Y_1(T)|$ , 我们找到了:

- 尺度  $\tilde{\rho}$ ;
- 一个  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱  $\tilde{P}$  及其着色  $Y(\tilde{P})$ ;
- 一族管  $\mathbb{T}_{\tilde{P}}$  及其着色  $Y_{\tilde{P}}(T) \subset Y'(T) \cap \tilde{P}$ 。

它们满足:

- 每个  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$  从  $\tilde{P}$  的长端退出, 如图 9 左图所示;
- $Y(\tilde{P}) = \bigcup_{T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}} Y_{\tilde{P}}(T)$ , 且  $|Y(\tilde{P})| \gtrsim_\delta \delta^{4\eta+4\epsilon_1} |\tilde{P}|$ ;
- 对每个  $x \in Y(P)$ ,  $(\mathbb{T}_{\tilde{P}})_{Y_{\tilde{P}}}(x)$  中的管, 其方向在  $\tilde{\rho}$ -帽  $B(\text{dir}(\tilde{P}), \tilde{\rho})$  内以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。

现在反复应用步骤 3。初始令  $(\mathbb{T}, Y') = (\mathbb{T}, Y_1)$ 、 $\tilde{P}_0 = \emptyset$ 。只要  $\sum |Y'(T)| \geq \frac{1}{2} \sum |Y_1(T)|$ , 就:

- 应用步骤 3 的论证;
- 把步骤 3 找到的棱柱  $\tilde{P}$  放入多重集  $\tilde{\mathcal{P}}_0$  (若已存在则再加入一个副本);
- 对每个  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$ , 把着色  $Y'(T)$  替换为  $Y'(T) \setminus Y_{\tilde{P}}(T)$ 。

重复上述过程, 直到  $\sum |Y'(T)| < \frac{1}{2} \sum |Y_1(T)|$  时停止。

考察该过程的输出。首先,

$$\sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \sum_{T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}} |Y_{\tilde{P}}(T)| \geq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y_1(T)| \gtrsim_\delta \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|. \quad (8.11)$$

---

<sup>2</sup>简言之, 我们选取一族  $T' \in \mathcal{H}'$ , 它们与  $T_1$  的夹角为  $\sim \tilde{\rho}$ , 并在彼此相距  $\delta/\tilde{\rho}$  的点处与  $T_1$  相交; 把这些管限制在上述  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱内后, 它们以误差  $\lesssim 1$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。每根管都具有着色  $Y'(T) \cap \tilde{P}$ , 满足  $|Y'(T) \cap \tilde{P}| \gtrsim \delta^{2\eta}\tilde{c}\delta^2$ , 因此这些着色的并几乎不相交。

经二进抽屉原理, 可选取多重集  $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \tilde{\mathcal{P}}_0$ , 使每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$  具有共同的  $\tilde{\rho}$  值 (至多相差因子 2)。略滥用记号, 仍把该值记为  $\tilde{\rho}$ 。我们选择  $\tilde{\mathcal{P}}_1$ , 使界 (8.11) (首项与末项) 在以  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  替换  $\tilde{\mathcal{P}}_0$  后仍成立。

对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ , 定义  $Y_2(T) = \bigcup_{\tilde{P}} Y_{\tilde{P}}(T)$ , 其中并取遍满足  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$  的  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ 。为保持记号一致, 令  $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_1$ 。于是  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化。

**步骤 5.** 概括步骤 4。我们找到了:

- $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$ ; 而前者又是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化;
- 一个尺度  $\tilde{\rho} \geq \delta^{1-\omega/100}$ ;
- 一个由  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱组成的多重集  $\tilde{\mathcal{P}}_1$ , 以及这些棱柱上的着色  $Y_1(\tilde{P})$  (步骤 4 中记为  $Y(\tilde{P})$ )。注意,  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  中的棱柱未必本质不同;
- 对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ , 一族管  $\mathbb{T}_{\tilde{P}} \subset \mathbb{T}_2$ 。

这些对象满足:

- 对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ , 每个  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$  都从  $\tilde{P}$  的长端退出;
- 对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ , 有  $Y_1(\tilde{P}) = \tilde{P} \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}} Y_2(T)$ , 且  $|Y_1(\tilde{P})| \gtrsim_\delta \delta^{4\eta+4\varepsilon_1} |\tilde{P}|$ ;
- 对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$  和每个  $x \in Y_1(\tilde{P})$ ,  $(\mathbb{T}_{\tilde{P}})_{Y_2}(x)$  中的管, 其方向在  $\tilde{\rho}$ -帽  $B(\text{dir}(\tilde{P}), \tilde{\rho})$  内以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。

比较上述各项与引理 8.2 的结论 (C)。目前已经满足结论 (C) 的第 (i)、(iv) 项。下面继续得到其他各项。

首先,  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  中的棱柱可能不是本质不同的。这并非可通过  $\sim 1$  精化修复的小缺陷, 而可能非常严重:  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  中可能有大量棱柱两两可比较, 甚至完全相同。我们把  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  中可比较的  $2a \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱合并为一个  $4a \times \tilde{\rho}(2\tilde{c}) \times (2\tilde{c})$  棱柱。合并后的新棱柱族记为  $\tilde{\mathcal{P}}_2$ 。新构造棱柱上的着色  $Y_2(\tilde{P})$  定义为对应  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  棱柱着色的并, 而  $\mathbb{T}_{\tilde{P}} \subset \mathbb{T}_2$  则定义为对应各棱柱的  $\{\mathbb{T}_{\tilde{P}_1}\}$  的并。

步骤 5 开头的 (a) 对新棱柱  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  可能不再成立, 但这是一个小缺陷: 把每个  $4a \times 2\tilde{\rho}(2\tilde{c}) \times (2\tilde{c})$  棱柱替换为与之同心同轴、尺寸为  $100a \times 100\tilde{\rho}\tilde{c} \times 2\tilde{c}$  的棱柱即可恢复该性质 (见图 12)。这可能再次破坏棱柱的本质不同性, 不过此时只需对棱柱作一个  $\sim 1$  精化即可恢复; 该精化也诱导  $\mathbb{T}_2$  上着色  $Y_2$  的  $\sim 1$  精化。把由此得到的新棱柱族记为  $\tilde{\mathcal{P}}_3$ 。略滥用记号, 我们重新定义  $\tilde{c}$ 、 $\tilde{\rho}$ , 并令  $\tilde{a} = 100a$  (各自仅改变一个  $\sim 1$  的乘法因子), 使  $\tilde{\mathcal{P}}_3$  中棱柱仍具有尺寸  $\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$ 。

注意, 上面的 (b) 对新构造的棱柱及其着色仍成立。更关键的是, (c) 也仍成立; 这由引理 7.12 (宽广向量集之并仍宽广) 得到。更具体地, 在步骤 4 中, 对每个  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$ , 我们已把着色  $Y'(T)$  替换为  $Y'(T) \setminus Y_{\tilde{P}}(T)$ , 因此通过每个点  $x$ , 至多有一个  $\tilde{P}$  满足  $x \in Y_{\tilde{P}}(T)$ 。这些宽广向量集彼此不交, 故它们的并是集合而非多重集; 于是引理 7.12 蕴含这些宽广向量集的并仍然宽广。

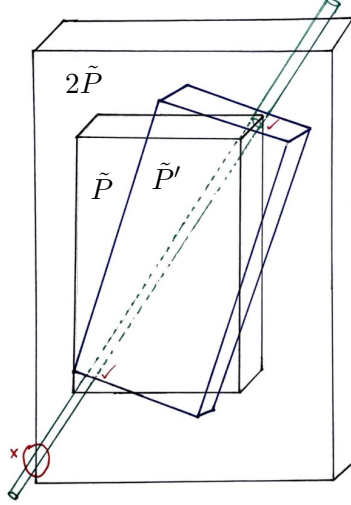


图 12: 棱柱  $\tilde{P}$  与  $\tilde{P}'$  可比较, 因此二者都被替换为同一个  $4a \times \tilde{\rho}(2\tilde{c}) \times (2\tilde{c})$  棱柱 (图中恰为  $2\tilde{P}$ , 即  $\tilde{P}$  的二倍膨胀)。这会产生一个问题 (红圈处): 从  $\tilde{P}'$  长端退出的一根管 (绿色) 可能无法从  $2\tilde{P}$  的长端退出。解决办法是把该  $4a \times \tilde{\rho}(2\tilde{c}) \times (2\tilde{c})$  棱柱替换为一个略宽、略厚但不更高的棱柱。

**步骤 6.** 在步骤 5 中, 我们构造了一族本质不同的  $\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱  $\tilde{\mathcal{P}}_3$  及其着色  $Y_3$ 。称这一对为  $(\tilde{\mathcal{P}}_3, Y_3)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}}$ 。对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_3$ , 都有一族  $\mathbb{T}_{\tilde{P}} \subset \mathbb{T}_2$ , 且每根管都从  $\tilde{P}$  的长端退出。

当前任务是进一步精化  $(\tilde{\mathcal{P}}_3, Y_3)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}}$  与  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$ , 使之更接近引理 8.2 的结论 (C)。结论 (C) 第 (ii) 项涉及  $\mathbb{T}'$  的分割覆盖  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ 。构造如下。首先, 令  $\{T_{\tilde{\rho}}\}$  为满足下列性质的一族  $\tilde{\rho}$ -管:

- 每根  $\delta$ -管至少包含在  $\{T_{\tilde{\rho}}\}$  中的一根管内;
- 对每个  $\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}$  棱柱  $\tilde{P}$ , 至少存在一根  $T_{\tilde{\rho}} \in \{T_{\tilde{\rho}}\}$ , 使  $\tilde{P} \subset T_{\tilde{\rho}}$  且  $\angle(\text{dir}(\tilde{P}), \text{dir}(T_{\tilde{\rho}})) \leq 2\tilde{\rho}$ ;
- $\{T_{\tilde{\rho}}\}$  中的管在如下意义下弱本质不同: 对任意固定的  $T_{\tilde{\rho}}$ , 与之可比较的其余管只有  $O(1)$  根。

接着, 对  $\{T_{\tilde{\rho}}\}$  作一个  $O(1)$  因子的抽屉化, 选取子集  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}} \subset \{T_{\tilde{\rho}}\}$ , 使其在如下意义下强本质不同: 对任意两根不同的  $T_{\tilde{\rho}}, T'_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ ,  $N_{100\tilde{\rho}}(T_{\tilde{\rho}}) \cap N_{100\tilde{\rho}}(T'_{\tilde{\rho}})$  的直径至多为  $1/2$ 。特别地, 不存在一根  $\delta$ -管同时包含在  $N_{100\tilde{\rho}}(T_{\tilde{\rho}})$  与  $N_{100\tilde{\rho}}(T'_{\tilde{\rho}})$  中。选择  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  使得:

- 定义  $\mathbb{T}_4$  为所有包含在某根  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  中的  $T \in \mathbb{T}_2$ , 即  $\mathbb{T}_4 = \bigcup_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} \mathbb{T}_2[T_{\tilde{\rho}}]$ ; 并令  $Y_4$  为  $Y_2$  在  $\mathbb{T}_4$  上的限制。则  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_2, Y_2)_\delta$  的一个  $\sim 1$  精化。
- 类似地, 定义  $\tilde{\mathcal{P}}_4$  为满足如下性质的  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_3$ : 存在  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ , 使  $\tilde{P} \subset T_{\tilde{\rho}}$  且  $\angle(\text{dir}(\tilde{P}), \text{dir}(T_{\tilde{\rho}})) \leq 2\tilde{\rho}$ ; 并定义

$$Y_4(\tilde{P}) = Y_3(\tilde{P}) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}} \cap \mathbb{T}_4} Y_4(T), \quad (8.12)$$

则  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}}$  是  $(\tilde{\mathcal{P}}_3, Y_3)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho}\tilde{c} \times \tilde{c}}$  的一个  $\gtrsim 1$  精化。

由此有：

- (a) 第 (i) 项蕴含  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  是  $\mathbb{T}_4$  的分割覆盖，而且更强地， $\{N_{100\tilde{\rho}}(T_{\tilde{\rho}}) : T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}\}$  也构成  $\mathbb{T}_4$  的分割覆盖。
- (b) 第 (ii) 项蕴含，对每个  $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_4$ ，存在唯一  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  同时满足  $\tilde{P} \subset T_{\tilde{\rho}}$  与  $\angle(\text{dir}(\tilde{P}), \text{dir}(T_{\tilde{\rho}})) \leq 2\tilde{\rho}$ 。于是得到分割

$$\tilde{\mathcal{P}}_4 = \bigsqcup_{\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} (\tilde{\mathcal{P}}_4)_{T_{\tilde{\rho}}}. \quad (8.13)$$

(比较定义 7.1 第 (i) 项。)

- (c) 第 (i)、(ii) 项还蕴含：若  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ 、 $\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_4)_{T_{\tilde{\rho}}}$  且  $T \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}} \cap \mathbb{T}_4$ ，则  $T \in \mathbb{T}_4[T_{\tilde{\rho}}]$ 。这是因为  $T$  从  $\tilde{P}$  的长端退出，从而  $\angle(\text{dir}(T), \text{dir}(\tilde{P})) \leq 10\tilde{\rho}$ 。

下一步估计  $\sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_4} |\tilde{P}|$ 。令  $\tau_i$  为步骤 2 中满足  $\delta^{\varepsilon_1}\rho \leq \tau_i < \rho$  的尺度。由于  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  是  $\gtrsim_{\delta} \delta^{4\eta+4\varepsilon_1}$ -稠密，故

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_4} |\tilde{P}| &\lesssim_{\delta} \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_4} |Y_4(\tilde{P})| \\ &= \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} \left| \bigsqcup_{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_4)_{T_{\tilde{\rho}}}} Y_4(\tilde{P}) \right| \\ &\leq \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_4[T_{\tilde{\rho}}]} Y_4(T) \right| \\ &\lesssim \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} \left( \mu_i^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}_1[T_{\tilde{\rho}}]} |Y_1(T)| \right) \\ &= \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \mu_i^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}_1} |Y_1(T)| \\ &\lesssim \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \mu_i^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}_2} |Y_2(T)|. \end{aligned} \quad (8.14)$$

第三行使用 (8.12)；第四行使用每根  $\tilde{\rho}$ -管都包含某根  $\tau_i$ -管以及步骤 2 的第 (i) 项；最后一行使用 (8.11) 和定义  $Y_2(T) = \bigcup_{\tilde{P}} Y_{\tilde{P}}(T)$ 。

**步骤 7.** 我们希望证明，经过适当精化后， $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  是  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_{\delta}$  关于  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  的鲁棒  $\delta^{\varepsilon}$ -稠密双尺度颗粒分解，即满足定义 7.1。当前最大障碍是该定义的第 (ii) 项：集合  $\{Y_4(\tilde{P}) : \tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_4)_{T_{\tilde{\rho}}}\}$  未必两两不交。

我们按如下方式修复。声称：要么引理 8.2 的结论 (A) 成立（于是证明结束），要么存在  $(\mathbb{T}_4, Y_4)$  的一个精化  $(\mathbb{T}_5, Y_5)_{\delta}$ ，以及  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  的一个精化  $(\tilde{\mathcal{P}}_5, Y_5)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$ ，满足：

- 对每个  $T_{\rho} \in \mathbb{T}_{\rho}$ ，集合  $\{Y_5(\tilde{P}) : \tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_5)_{T_{\tilde{\rho}}}\}$  两两不交（其中  $(\tilde{\mathcal{P}}_5)_{T_{\tilde{\rho}}} = \tilde{\mathcal{P}}_5 \cap (\tilde{\mathcal{P}}_4)_{T_{\tilde{\rho}}}$ ；回忆 (8.13)）。

- $(\tilde{\mathcal{P}}_5, Y_5)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  是  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化。
- $(\mathbb{T}_5, Y_5)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化, 其中  $\mathbb{T}_5 = \mathbb{T}_4$ , 且

$$Y_5(T) = Y_4(T) \cap \bigcup_{\substack{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_5)_{T_{\tilde{\rho}}} \\ T \in \mathbb{T}_{\tilde{P}} \cap \mathbb{T}_4}} Y_5(\tilde{P}), \quad (8.15)$$

这里  $T_{\tilde{\rho}}$  是包含  $T$  的唯一一根  $\tilde{\rho}$ -管。

- 对每个  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ ,

$$\bigcup_{T \in \mathbb{T}_5[T_{\tilde{\rho}}]} Y_5(T) = \bigsqcup_{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_5)_{T_{\tilde{\rho}}}} Y_5(\tilde{P}). \quad (8.16)$$

该声称将在步骤 8 证明; 暂先接受。

此时  $(\tilde{\mathcal{P}}_5, Y_5)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  与  $(\mathbb{T}_5, Y_5)_\delta$  已满足定义 7.1 的第 (i)、(ii)、(iv) 项。前两项显然。验证第 (iv) 项: 若  $T$  与  $\tilde{P}$  关联到同一根  $\rho$ -管, 且  $Y_5(T) \cap Y_5(\tilde{P}) \neq \emptyset$ , 则必有  $T \in \mathbb{T}_4 \cap \mathbb{T}_{\tilde{P}}$ 。因此  $T$  从  $\tilde{P}$  的长端退出, 并且  $Y_5(T) \cap \tilde{P} \subset Y_5(\tilde{P})$  (由 (8.15) 的定义), 如所需。

还需得到定义 7.1 的第 (iii) 项。由二进抽屉原理, 存在数  $\mu$ 、集合  $\mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}$  以及  $(\mathbb{T}_5, Y_5)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathbb{T}_6, Y_6)_\delta$ , 使得:

- $\mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}$  是  $\mathbb{T}_6$  的平衡分割覆盖;
- 对每个  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}$  及每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_6[T_{\tilde{\rho}}]} Y_6(T)$ , 有  $\#((\mathbb{T}_6[T_{\tilde{\rho}}])_{Y_6}(x)) \sim \mu$ 。

令  $\tilde{\mathcal{P}}_6 = \bigcup_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}} (\tilde{\mathcal{P}}_5)_{T_{\tilde{\rho}}}$ , 并取着色  $Y_6(\tilde{P}) \subset Y_5(\tilde{P})$ , 使 (8.16) 在以  $(\mathbb{T}_6, Y_6)_\delta$  替换  $(\mathbb{T}_5, Y_5)_\delta$ 、以  $(\tilde{\mathcal{P}}_6, Y_6)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  替换  $(\tilde{\mathcal{P}}_5, Y_5)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  后仍成立。

三元组  $(\mathbb{T}_6, Y_6)_\delta$ 、 $(\tilde{\mathcal{P}}_6, Y_6)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  与  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  继续满足定义 7.1 的第 (i)、(ii)、(iv) 项。为验证第 (iii) 项, 需要估计  $(\tilde{\mathcal{P}}_6, Y_6)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  上着色的密度。由 (8.14),

$$\sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_6} |\tilde{P}| \lesssim_\delta \delta^{-4\eta-4\varepsilon_1} \mu_i^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}_2} |Y_2(T)|. \quad (8.17)$$

注意  $\mu \lesssim \mu_i \delta^{-2\varepsilon_1}$  (回忆  $\mu_i$  是与尺度  $\tau_i$  对应的重数,  $\tau_i$  在步骤 6 选取)。于是

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_6} |Y_6(\tilde{P})| &= \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}} \left| \bigsqcup_{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}_6)_{T_{\tilde{\rho}}}} Y_6(\tilde{P}) \right| \\
&= \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_6[T_{\tilde{\rho}}]} Y_6(T) \right| \\
&\gtrsim \sum_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}'_{\tilde{\rho}}} \left( \mu^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}_6[T_{\tilde{\rho}}]} |Y_6(T)| \right) \\
&\gtrsim \mu_i^{-1} \delta^{2\varepsilon_1} \sum_{T \in \mathbb{T}_6} |Y_6(T)| \\
&\gtrsim_{\delta} \mu_i^{-1} \delta^{\varepsilon_2+2\varepsilon_1} \sum_{T \in \mathbb{T}_6} |Y_2(T)|.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

比较 (8.17) 与 (8.18), 得到  $(\tilde{\mathcal{P}}_6, Y_6)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  为  $\gtrsim_{\delta} \delta^{4\eta+6\varepsilon_1+\varepsilon_2} \geq \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。取  $\varepsilon_2$  关于  $\varepsilon$  足够小, 使该量  $\geq \delta^{\varepsilon}$ 。于是引理 8.2 的结论 (C) 成立。

引理 8.2 的证明至此只剩步骤 7 开头的声称。下面证明该声称。

**步骤 8.** 最后证明步骤 7 中的声称。为方便记号, 略作滥用, 把  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  重命名为  $(\tilde{\mathcal{P}}, Y)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$ 。非正式地说, 思路如下: 若着色  $\{Y(\tilde{P}): \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_{T_{\tilde{\rho}}}\}$  重叠很小, 就可以精化为两两不交; 反之, 如果重叠很大, 由于  $\tilde{\mathcal{P}}_{T_{\tilde{\rho}}}$  中的棱柱本质不同且都满足  $\angle(\text{dir}(\tilde{P}), \text{dir}(T_{\tilde{\rho}})) \lesssim \tilde{\rho}$ , 通过一个典型点的棱柱  $\tilde{P}_Y(x)$  必须具有不同的切平面。于是应用引理 5.10, 可知典型棱柱的加厚邻域与  $\bigcup_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}} Y(\tilde{P})$  有很大交集; 进而典型管的加厚邻域与  $\bigcup_{\mathbb{T}} Y(T)$  有很大交集。由推论 5.19, 得到引理 8.2 的结论 (A)。下面给出细节。

由引理 5.9, 可选取一个  $\gtrsim 1$  精化  $(\tilde{\mathcal{P}}', Y')_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$ , 使每个着色  $Y'(\tilde{P})$  都是正则的 (回忆定义 5.8), 并满足  $|Y'(\tilde{P})| \gtrsim_{\delta} \delta^{4\eta+4\varepsilon_1} |\tilde{P}|$ 。

经二进抽屉原理, 可进一步假设存在数  $\nu$  和  $(\tilde{\mathcal{P}}', Y')_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  的一个  $\gtrsim_{\delta}$  精化  $(\tilde{\mathcal{P}}'', Y'')_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$ , 使得对每个  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  和每个  $x \in \bigcup_{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}'')_{T_{\tilde{\rho}}}} Y''(\tilde{P})$ , 有  $\#((\tilde{\mathcal{P}}'')_{Y''}(x)) \sim \nu$ 。

先考虑

$$\nu \geq \delta^{-\varepsilon_2}. \tag{8.19}$$

我们将证明, 对适当的  $\alpha$ , 引理 8.2 的结论 (A) 成立。注意,  $((\tilde{\mathcal{P}}')_{T_{\tilde{\rho}}})_{Y'}(x)$  中的棱柱本质不同, 且都满足  $\angle(\text{dir}(T_{\tilde{\rho}}), \text{dir}(\tilde{P})) \leq 2\tilde{\rho}$ , 并且都通过公共点  $x$ 。因此, 对每个  $x \in \bigcup_{\tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}'')_{T_{\tilde{\rho}}}} Y''(\tilde{P})$ , 该集合中存在一对棱柱  $\tilde{P}, \tilde{P}'$ , 满足

$$\angle(\Pi(\tilde{P}^{T_{\tilde{\rho}}}), \Pi((\tilde{P}')^{T_{\tilde{\rho}}})) \gtrsim \nu^{1/2}(\tilde{a}/(\tilde{\rho}\tilde{c})).$$

(作为比较,  $\Pi(\tilde{P}^{T_{\tilde{\rho}}})$  与  $\Pi((\tilde{P}')^{T_{\tilde{\rho}}})$  的定义精度为  $\tilde{a}/(\tilde{\rho}\tilde{c})$ 。)

因此, 对每个  $T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ 、每个  $\tilde{P}_0 \in \tilde{\mathcal{P}}''_{T_{\tilde{\rho}}}$  及每个  $x \in Y''(\tilde{P}_0)$ , 有

$$\sup_{\tilde{P} \in ((\tilde{\mathcal{P}}'')_{T_{\tilde{\rho}}})_{Y''}(x)} \angle(\Pi(\tilde{P}_0^{T_{\tilde{\rho}}}), \Pi(\tilde{P}^{T_{\tilde{\rho}}})) \gtrsim \nu^{1/2} \tilde{a}/(\tilde{\rho}\tilde{c}),$$

从而

$$\inf_{x \in Y''(\tilde{P}_0)} \sup_{\tilde{P} \in ((\tilde{P}'_{T_{\tilde{P}}})_{Y'}(x))} \angle(\Pi(\tilde{P}_0^{T_{\tilde{P}}}), \Pi(\tilde{P}^{T_{\tilde{P}}})) \gtrsim \nu^{1/2} \tilde{a}/(\tilde{\rho} \tilde{c}).$$

这正是以  $\lambda \approx_\delta \delta^{4\eta+4\varepsilon_1}$  应用引理 5.10 所需的条件。令  $\tilde{\mathcal{P}}'''$  为满足  $|Y''(\tilde{P}_0)| \gtrsim_\delta \delta^{4\eta+4\varepsilon_1}$  的  $\tilde{P}_0 \in \tilde{\mathcal{P}}''$  的集合。撤销重标度后, 对每个  $\tilde{P}_0 \in \mathcal{P}'''$ ,

$$\left| N_{\nu^{1/2}\tilde{a}}(\tilde{P}_0) \cap \bigcup_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}} Y(\tilde{P}) \right| \gtrsim_\delta \delta^{16\eta+16\varepsilon_1} |N_{\nu^{1/2}\tilde{a}}(\tilde{P}_0)|. \quad (8.20)$$

这意味着, 把  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_\delta$  作一个  $\approx_\delta 1$  因子的精化后, 可得到一对  $(\mathbb{T}'_4, Y'_4)_\delta$ , 使每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'_4} Y'_4(T)$  都满足

$$\left| B(x, \nu^{1/2}\tilde{a}) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim_\delta \delta^{O(\eta+\varepsilon_1)} |B(x, \nu^{1/2}\tilde{a})|. \quad (8.21)$$

由推论 5.19 (并使用 (8.19)), 只要取  $\alpha \leq \omega\varepsilon_2/2$ , 并令  $\varepsilon_1$  与  $\eta$  足够小 (依赖于  $\omega, \varepsilon_2$  及 (8.21) 右端隐含常数), 结论 (A) 成立。

最后考虑 (8.19) 不成立的情形, 即

$$\nu \leq \delta^{-\varepsilon_2}. \quad (8.22)$$

这意味着, 对每个  $T_{\tilde{P}} \in \mathbb{T}_{\tilde{P}}$ , 集合  $\{Y''(\tilde{P}): \tilde{P} \in (\tilde{\mathcal{P}}'')_{T_{\tilde{P}}}\}$  的重叠度至多为  $\delta^{-\varepsilon_2}$ 。由抽屉原理, 可以选取  $(\tilde{\mathcal{P}}_4, Y_4)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$  的一个精化  $(\tilde{\mathcal{P}}_5, Y_5)_{\tilde{a} \times \tilde{\rho} \tilde{c} \times \tilde{c}}$ , 满足步骤 7 列出的四项性质。□

### 8.3 操作 #3: 用局部 $C_{KT-CW}^{\text{loc}}$ 较小的更宽颗粒替换原颗粒

**引理 8.3.** 我们采用第 7.4 节中操作 #1、#2、#3 的共同设置: 假设。则下列结论至少有一个成立。

假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立, 并令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\alpha, \eta, c > 0$ , 使得对所有  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$  以及满足  $b/c = \rho$  的所有  $\delta \leq a \leq b \leq c$ , 下述结论成立。

设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。设  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖, 并假设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。设  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  关于  $\mathbb{T}_\rho$  的鲁棒  $\delta^\eta$ -稠密双尺度颗粒分解。

则下列结论至少有一个成立。

(A) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (A)。

(B) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (B)。此外,

$$(iv) \ C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{P}') \leq \delta^{-\zeta}.$$

(C) 操作 #1、#2、#3 共同设置中的结论 (C)。此外,

$$(v) \tilde{c} \geq c, \quad \delta^{-\zeta/400} \rho \leq \tilde{\rho} \leq 1.$$

证明. **步骤 1.** 令  $0 < \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_4$  为稍后选取的小量。对  $i = 1, \dots, 3$ , 取  $\varepsilon_i$  相对于  $\varepsilon_{i+1}$  很小; 取  $\varepsilon_4$  相对于  $\varepsilon$  很小; 再取  $\alpha, \eta$  相对于  $\varepsilon_1$  很小。

首先, 可以假设

$$a \leq \delta^{1-\varepsilon_1}, \quad (8.23)$$

否则只要根据  $\varepsilon_1$  把  $\alpha$  和  $\eta$  取得足够小, 结论 (A) 立即成立。论证与引理 8.2 证明的步骤 1 完全相同。

接下来正则化  $\mathbb{T}$ 。通过二进抽屉原理, 并以一个  $\gtrsim (\log 1/\delta)^{-1/\varepsilon_1}$  精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  替换  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 可假设:

(a) 对每个形如  $\tau_i = \delta^{\varepsilon_1 i}$  的尺度,  $i = 1, \dots, \varepsilon_1^{-1}$ , 存在“密度”  $\lambda_i$ , 使

$$\left| B(x, \tau_i) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \sim \lambda_i |B(x, \tau_i)| \quad \text{对每个 } x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_1(T). \quad (8.24)$$

(b) 对每个  $i = 1, \dots, \varepsilon_1^{-1}$ , 存在一对  $(\mathbb{T}_{\tau_i}, Y_{\tau_i})_{\tau_i}$ , 它是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密的。此外,  $\mathbb{T}_{\tau_i}$  是  $\mathbb{T}_1$  的平衡分割覆盖; 且对每个  $T_{\tau_i}$ ,

$$Y_{\tau_i}(T_{\tau_i}) \subset T_{\tau_i} \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} N_{\tau_i}(Y_1(T)).$$

由此,  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_{\tau_i}) \lesssim C_{F-SW}(\mathbb{T}_1) \lesssim (\log 1/\delta)^{-1/\varepsilon_1} \delta^{-\eta}$ , 并且

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\tau_i}) \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}_1) \frac{\#\mathbb{T}_{\tau_i} |T_{\tau_i}|}{\#\mathbb{T}_1 |T|}.$$

若按  $\varepsilon_1$  把  $\eta > 0$  取得足够小, 则可对  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  应用估计 (以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ ), 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim \delta^{2\varepsilon_1} \lambda_i \tau_i^\omega C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\tau_i})^{-1} (\#\mathbb{T}_{\tau_i}) |T_{\tau_i}| \left( C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\tau_i})^{-3/2} C_{F-SW}(\mathbb{T}_{\tau_i}) (\#\mathbb{T}_{\tau_i}) |T_{\tau_i}|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_1 + O(\eta)} \left[ \lambda_i \left( \frac{\tau_i}{\delta} \right)^\omega \left( \frac{|T_{\tau_i}| (\#\mathbb{T}_{\tau_i})^{1/2}}{|T| (\#\mathbb{T})^{1/2}} \right)^\sigma \right] \delta^\omega (\#\mathbb{T}) |T| \left( (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim \delta^{3\varepsilon_1} \left[ \lambda_i \left( \frac{\tau_i}{\delta} \right)^\omega \frac{|T_{\tau_i}|^{\sigma/2}}{|T|^{\sigma/2}} \right] \delta^\omega (\#\mathbb{T}) |T| \left( (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

最后一个不等式使用了  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_1) \lesssim_\delta \delta^{-\eta}$ , 因而  $(\#\mathbb{T})/(\#\mathbb{T}_{\tau_i}) \lesssim_\delta \delta^{-\eta} |T_{\tau_i}|/|T|$ 。特别地, 若存在某个  $i$  使  $\lambda_i \left( \frac{\tau_i}{\delta} \right)^\omega \frac{|T_{\tau_i}|^{\sigma/2}}{|T|^{\sigma/2}}$  显著大于 1, 就得到引理 8.3 的结论 (A)。

**步骤 2.** 令  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$ 。对每个  $P \in \mathcal{P}_1$ , 定义  $Y_1(P) = Y(P) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]} Y_1(T)$ , 其中  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  是满足  $P \in T_\rho$  且  $\angle(\text{dir}(P), \text{dir}(T_\rho)) \leq 2\rho$  的唯一  $\rho$ -管。由于  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化, 由定义 7.1 第 (ii)、(iii) 项,  $(\mathcal{P}_1, Y_1)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化。

对每个着色  $Y_1(P)$  应用引理 5.9, 得到正则子着色  $Y_2(P) \subset Y_1(P)$ 。令  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$  为满足  $|Y_2(P)| \geq \delta^{2\eta} |P|$  的棱柱集合; 则  $(\mathcal{P}_2, Y_2)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}_1, Y_1)_{a \times b \times c}$  的一个  $\gtrsim 1$  精化。

令  $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_2$ 。再经二进抽屉原理，可以选取  $\theta_0 \in [\frac{a}{b}, 1]$ ，以及  $(\mathcal{P}_2, Y_2)_{a \times b \times c}$  的一个  $(\log 1/\delta)^{-1}$  精化  $(\mathcal{P}_3, Y_3)_{a \times b \times c}$ ，使得对每个  $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}_3} Y_3(P)$ ，都有  $\theta(x) \sim \theta_0$ ，其中  $\theta(x)$  定义见定义 5.12。

先考虑  $\theta_0 \geq \delta^{-\varepsilon_1}(a/b)$ 。目标是证明结论 (A)。令  $\mathcal{P}'_3 \subset \mathcal{P}_3$  为满足  $|Y_3(P_0)| \geq \frac{1}{100}\delta^{2\eta}|P_0|$  的棱柱集合。对每个  $x \in Y_3(P_0)$ ，有

$$\frac{a}{b} + \sup_{P \in \mathcal{P}_2} \angle(\Pi(P_0), \Pi(P)) \gtrsim \theta_0.$$

又有  $|Y_3(P_0)| \geq \frac{1}{100}\delta^{2\eta}|P_0|$ ，每个  $P \in \mathcal{P}_2$  满足  $|Y_2(P)| \geq \frac{1}{100}\delta^{2\eta}|P_0|$ ，且  $Y_2(P)$  正则。因此可应用引理 5.10（以  $Y_3(P_0)$  代替  $Y_0(P_0)$ ，以  $(\mathcal{P}_2, Y_2)_{a \times b \times c}$  代替  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$ ），得到

$$\left| N_{b\theta_0}(P_0) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{8\eta} |N_{b\theta_0}(P_0)|. \quad (8.26)$$

由于 (8.26) 对每个  $P_0 \in \mathcal{P}'_3$  成立，且  $(\mathcal{P}'_3, Y_3)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的一个  $\gtrsim_{\delta} 1$  精化，再作一个  $\sim 1$  精化  $(\mathcal{P}'_3, Y'_3)_{a \times b \times c}$  后，可假设对每个  $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}'_3} Y'_3(P)$  都有

$$\left| N_{b\theta_0}(x) \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}} Y(P) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{8\eta} |N_{b\theta_0}(x)|.$$

令  $(\mathbb{T}_1, Y'_1)_{\delta}$  为由  $(\mathcal{P}'_3, Y'_3)_{a \times b \times c}$  诱导的  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_{\delta}$  的精化。由定义 7.1 第 (ii) 项， $(\mathbb{T}_1, Y'_1)_{\delta}$  是  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_{\delta}$  的一个  $\approx_{\delta} 1$  精化，并且对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'_1} Y'_1(T)$ ，

$$\left| N_{b\theta_0}(x) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}'_1} Y(T) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{8\eta} |N_{b\theta_0}(x)|. \quad (8.27)$$

因为  $b\theta_0 \geq \delta^{-\varepsilon_1}a$ ，由推论 5.19，只要按  $\varepsilon_1$  把  $\eta > 0$  取得足够小，并取  $\alpha \leq \varepsilon_1\omega/2$ ，就得到结论 (A)。

以下假设  $\theta_0 \leq \delta^{-\varepsilon_1}(a/b)$ ，即

$$\sup_x \sup_{P, P' \in (\mathcal{P}_3)_{Y_3}(x)} \angle(\Pi(P), \Pi(P')) \leq \delta^{-\varepsilon_1}(a/b). \quad (8.28)$$

**步骤 3.** 回忆定义 7.3 后的讨论（此处该讨论中的  $K$  为  $\delta^{-\varepsilon_1}$ ）。以一个  $\sim 1$  精化  $(\mathcal{P}_4, Y_4)_{a \times b \times c}$  替换  $(\mathcal{P}_3, Y_3)_{a \times b \times c}$ （它又诱导  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_{\delta}$  的一个  $\sim 1$  精化  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_{\delta}$ ）后，可找到一族两两不同、尺寸为  $\delta^{-\varepsilon_1} \frac{ac}{b} \times c \times c$  的棱柱  $\mathcal{U}$ ，满足：

- (a) 集合  $\{\mathcal{P}_4\langle U \rangle : U \in \mathcal{U}\}$  构成  $\mathcal{P}_4$  的一个分割；
- (b) 集合  $\{\bigcup_{P \in \mathcal{P}_4\langle U \rangle} Y_4(P) : U \in \mathcal{U}\}$  两两不交。

每个  $U \in \mathcal{U}$  的尺寸为  $\delta^{-\varepsilon_1} \frac{ac}{b} \times c \times c = \delta^{-\varepsilon_1} \frac{a}{\rho} \times c \times c$ 。因此，对每个  $U$ ，存在至多  $\lesssim \delta^{-3\varepsilon_1}$  个尺寸可与  $\frac{a}{\rho} \times c \times c$  比较的棱柱  $\{Z\}$ ，使得对每个  $P \in \mathcal{P}_4\langle U \rangle$ ，都存在一个  $Z$  满足  $\square(P) \subset Z$ （回忆  $\rho = b/c$ ，故  $\square(P)$  的尺寸可与  $\frac{a}{\rho} \times c \times c$  比较）。

令  $Z_U$  为使

$$\#\{P \in \mathcal{P}_4: \square(P) \subset Z\},$$

最大化的、尺寸可与  $\frac{a}{\rho} \times c \times c$  比较的棱柱。于是  $\#\mathcal{P}_4\langle Z_U \rangle \gtrsim \delta^{3\varepsilon_1}(\#\mathcal{P}_4\langle U \rangle)$ 。令  $\mathcal{Z} = \{Z_U: U \in \mathcal{U}\}$ ,  $\mathcal{P}_5 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{P}_4\langle Z_U \rangle$ , 并令  $Y_5$  为  $Y_4$  在  $\mathcal{P}_5$  上的限制。则  $(\mathcal{P}_5, Y_5)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}_4, Y_4)_{a \times b \times c}$  的一个  $\gtrsim \delta^{3\varepsilon_1}$  精化, 并有:

(a') 集合  $\{\mathcal{P}_4\langle Z \rangle: Z \in \mathcal{Z}\}$  构成  $\mathcal{P}_5$  的一个分割;

(b') 集合  $\{\bigcup_{P \in \mathcal{P}_5\langle Z \rangle} Y_5(P): Z \in \mathcal{Z}\}$  两两不交。

对每个  $Z \in \mathcal{Z}$ ,  $(\mathcal{P}_5\langle Z \rangle)^Z$  中各集合是尺寸可与  $\rho \times \rho \times 1$  比较的凸集, 也就是可与  $\rho$ -管比较。为记录这一事实, 定义  $(\tilde{\mathbb{T}}_Z, \tilde{Y}_5)_\rho = ((\mathcal{P}_5\langle Z \rangle)^Z, Y_5^Z)_{\rho \times \rho \times 1}$ 。

以  $\approx_\delta 1$  精化替换  $(\mathcal{P}_5, Y_5)_{a \times b \times c}$  与  $\mathcal{Z}$  后, 可假设每个  $Z \in \mathcal{Z}$  的  $\tilde{\mathbb{T}}_Z$  具有近似相同的大小 (至多相差因子 2), 且对每个  $\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}_Z$ ,  $|\tilde{Y}_5(\tilde{T})|$  也近似相同。此外, 可假设每对  $(\tilde{\mathbb{T}}_Z, \tilde{Y}_5)_\rho$  都是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密。

**步骤 4.** 为方便记号, 固定  $Z \in \mathcal{Z}$ 。下文将寻找若干量 (例如尺度、重数等), 并根据排列  $\tilde{\mathbb{T}}_Z$  的具体性质区分不同情形。不过, 通过对  $\mathcal{Z}$  作抽屈化, 可以假设下文所有这些量对每个  $Z \in \mathcal{Z}$  都相同 (至多相差因子 2), 且所有  $Z$  都落在相同情形中。

对  $\tilde{\mathbb{T}}_Z$  应用命题 4.6 (凸集因子分解)。得到  $m \geq 1$ 、 $\tilde{\mathbb{T}}_Z$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $\tilde{\mathbb{T}}'_Z$ , 以及由全等棱柱组成的  $\tilde{\mathbb{T}}'_Z$  的分割覆盖  $\mathcal{W}_Z$ ; 记这些棱柱尺寸为  $s \times t \times 1$  (因每个棱柱至少包含一根管, 其最长尺寸为  $\sim 1$ )。  $\mathcal{W}_Z$  关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方、关于 Katz-Tao 凸 Wolff 公理从上方对  $\tilde{\mathbb{T}}'_Z$  进行因子分解, 两者误差均为  $\lesssim_\delta 1$ 。最后,

$$C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}'_Z) \leq m, \quad \text{且} \quad \#\tilde{\mathbb{T}}'_Z[W] \approx_\delta m \frac{|W|}{|\tilde{T}|} \quad \text{对每个 } W \in \mathcal{W}_Z. \quad (8.29)$$

先考虑

$$m \leq \delta^{-\zeta}. \quad (8.30)$$

目标是证明引理 8.3 的结论 (B)。

如步骤 4 开头所述, 可假设至少一半  $Z \in \mathcal{Z}$  满足 (8.30)。令  $\mathcal{P}_6 \subset \mathcal{P}_5$  为  $\mathcal{P}_6 = \bigcup_Z \phi_Z^{-1}(\tilde{\mathbb{T}}'_Z)$ , 其中并取遍满足 (8.30) 的  $Z$ 。令  $Y_6$  为  $Y_5$  在  $\mathcal{P}_6$  上的限制。

则  $(\mathcal{P}_6, Y_6)_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}_5, Y_5)$  的一个  $\gtrsim_\delta 1$  精化。撤销缩放  $\phi_Z$  后, 对每个  $P \in \mathcal{P}_6$ ,

$$C_{KT-CW}(\mathcal{P}_6\langle 2\square(P) \rangle) \lesssim \sup_{Z \in \mathcal{Z}} C_{KT-CW}(\mathcal{P}_6\langle Z \rangle) \leq m.$$

因此

$$C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{P}_6) \lesssim m.$$

最后再作二进抽屉化, 可选取  $(\mathcal{P}_6, Y_6)_{a \times b \times c}$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  (它又诱导  $(\mathbb{T}_4, Y_4)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{3\varepsilon_1}$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ), 以及  $\mathbb{T}'_\rho \subset \mathbb{T}_\rho$ , 使得  $\mathbb{T}'_\rho$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  的平衡分割覆盖, 并且  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  关于  $\mathbb{T}'_\rho$  的鲁棒  $\approx_\delta \delta^{3\varepsilon_1}$ -稠密双尺度颗粒分解。

由于  $C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{P}') \lesssim m$ , 引理 8.3 结论 (B) 的第 (iv) 项成立。第 (iii) 项由构造成立。若按  $\varepsilon$  把  $\varepsilon_1$  取得足够小, 则  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  满足第 (i) 项。最后, 因为

$$\#(\mathbb{T}'[T_\rho]_{Y'}(x)) \gtrsim_\delta \delta^{3\varepsilon_1} \#(\mathbb{T}[T_\rho]_Y(x)) \quad \text{对每个 } T_\rho \in \mathbb{T}'_\rho \text{ 且每个 } x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'[T_\rho]} Y'(T),$$

且假设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_\rho$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广, 故  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于  $\mathbb{T}'_\rho$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-\eta-3\varepsilon_1}$  宽广。选择  $\eta$  与  $\varepsilon_1$  足够小, 使其  $\leq \delta^{-\varepsilon}$ , 即验证结论 (B) 第 (ii) 项。<sup>3</sup>

因此, 若 (8.30) 成立, 则引理 8.3 的结论 (B) 成立。以下假设其失败, 即

$$m > \delta^{-\zeta}. \quad (8.31)$$

**步骤 5.** 步骤 4 中我们固定了  $Z \in \mathcal{Z}$ 。现在继续固定该  $Z$ , 并另外固定  $W \in \mathcal{W}_Z$ 。同步骤 4 一样, 可经二进抽屉原理假设, 对每个  $Z \in \mathcal{Z}$  及每个  $W \in \mathcal{W}_Z$ , 所有相关尺度、重数等近似相同 (至多相差因子 2)。

以下分析步骤 4 构造的各对  $(\tilde{\mathbb{T}}_Z[W], \tilde{Y}_5)_\rho$ 。为方便记号, 记这样的对为  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$ 。回忆该对是  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密;  $\tilde{\mathbb{T}}$  的基数由 (8.29) 给出; 且  $m$  满足 (8.31)。特别地,

$$C_{F-CW}(\tilde{\mathbb{T}}^W) \lesssim_\delta 1. \quad (8.32)$$

对集合  $\tilde{\mathbb{T}}$  应用推论 7.10 (寻找宽广尺度)。将该推论的“输出”尺度记为  $\tau$  (推论 7.10 中该输出尺度记为  $\rho$ , 但此处  $\rho$  已被占用)。略滥用记号, 仍用  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  表示推论 7.10 的输出。于是存在一族  $\mathbb{T}_\tau$  构成  $\tilde{\mathbb{T}}$  的平衡分割覆盖, 并且  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  相对于  $\mathbb{T}_\tau$  以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。此外,

$$\text{这些集合 } \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}[T_\tau]} \tilde{Y}(\tilde{T}), \quad T_\tau \in \mathbb{T}_\tau \text{ 的重叠度 } \lesssim \tau^{-\beta}. \quad (8.33)$$

我们声称

$$\tau \geq \rho^{1-\omega/8}, \quad (8.34)$$

否则引理 8.3 的结论 (A) 成立, 证明结束。若 (8.34) 不成立, 则集合  $\{\tilde{Y}(\tilde{T}): \tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}\}$  的重叠度至多为  $\lesssim \rho^{-\omega/4} \tau^{-\beta} \leq \delta^{-\omega/2}$ ; 结合步骤 3 的 (b'), 即得引理 8.3 的结论 (A)。

**步骤 6.** 我们希望对每个集合  $(\tilde{\mathbb{T}}^{T_\tau}, \tilde{Y}^{T_\tau})_{\rho/\tau}$  应用估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ 。但目前无法很好地控制  $C_{F-SW}(\tilde{\mathbb{T}}^{T_\tau})$ 。为解决这一问题, 对每个  $(\tilde{\mathbb{T}}[T_\tau], \tilde{Y})_\rho$  应用命题 4.8 (关于 Frostman 薄板 Wolff 公理的凸集因子分

<sup>3</sup>严格说, 只有当  $\delta > 0$  足够小 (依赖于上述  $\gtrsim$  记号中的隐含常数) 时, 才能保证误差  $\leq \delta^{-\varepsilon}$ 。若不满足, 则只要把  $\kappa > 0$  取得足够小, 结论 (A) 即成立。

解), 以  $\varepsilon_2$  代替  $\varepsilon$ 。只要  $\varepsilon_1$  与  $\eta$  相对于  $\varepsilon_2$  足够小即可。于是得到  $(\tilde{\mathbb{T}}[T_\tau], \tilde{Y})_\rho$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化  $(\tilde{\mathbb{T}}'[T_\tau], \tilde{Y}')_\rho$ , 以及  $T_\tau$  的一族凸子集  $\mathcal{V}_{T_\tau}$ , 它关于 Frostman 薄板 Wolff 公理以误差  $\delta^{-\varepsilon_2}$  从下方因子分解  $\tilde{\mathbb{T}}'[T_\tau]$ 。此外,

$$\text{这些集合 } \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}'[V]} \tilde{Y}'(\tilde{T}), \quad V \in \mathcal{V}_{T_\tau} \quad \text{两两不交。} \quad (8.35)$$

经抽屉化, 可假设  $\mathcal{V}_{T_\tau}$  中的集合尺寸相同, 并且对所有  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$  这些尺寸也相同。记为  $\theta \times \tau' \times 1$ 。由于  $V \subset T_\tau$ , 有  $\tau' \leq \tau$ 。我们声称该不等式几乎取等, 即

$$\delta^{\varepsilon_2/\beta} \tau \lesssim_\delta \tau' \leq \tau. \quad (8.36)$$

验证如下。  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  相对于覆盖  $\mathbb{T}_\tau$  以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广, 而  $(\tilde{\mathbb{T}}'[T_\tau], \tilde{Y}')_\rho$  是  $(\tilde{\mathbb{T}}[T_\tau], \tilde{Y})_\rho$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化。由抽屉原理, 至少存在一点  $x$ , 使得  $\tilde{\mathbb{T}}'_{Y'}(x)$  中管的方向在半径为  $\tau$  的帽内以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-\varepsilon_2}$  宽广。因此其中至少有两根管的角度  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2/\beta} \tau$ 。另一方面, 由 (8.35), 这对管必须包含在同一个  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱中, 从而得到 (8.36)。

令  $\tilde{\mathbb{T}}'$  为  $T_\tau$  遍历  $\mathbb{T}_\tau$  时各  $\tilde{\mathbb{T}}'[T_\tau]$  的并, 并令  $\tilde{Y}'$  为相应着色。略滥用记号, 仍将这一对记为  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$ 。此时该对为  $\gtrsim_\delta \delta^{\eta+\varepsilon_2} \geq \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。

**步骤 7.** 先考虑步骤 6 中棱柱  $\mathcal{V}_{T_\tau}$  几乎是管的情形, 即

$$\theta \geq \delta^{\zeta/10} \tau'. \quad (8.37)$$

若 (8.37) 成立, 则每个  $\tilde{\mathbb{T}}^V$  由尺寸为  $\frac{\rho}{\tau'} \times \frac{\rho}{\theta} \times 1$  的棱柱组成。  $(\tilde{\mathbb{T}}^V, \tilde{Y}^V)_{\rho/\tau' \times \rho/\theta \times 1}$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。暂假设

$$\rho \leq \delta^{\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (8.38)$$

若选取  $\varepsilon_2$  足够小, 使  $\varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}\beta\omega$ , 因而  $\frac{8\varepsilon_2\beta}{\sqrt{\varepsilon_2}\beta\omega-8\varepsilon_2} \leq \frac{16\sqrt{\varepsilon_2}}{\omega}$ , 则由 (8.34) 与 (8.36), 有  $\delta^{2\varepsilon_2} \geq \left(\frac{\rho}{\tau'}\right)^{\frac{32\sqrt{\varepsilon_2}}{\omega}}$ 。

因此, 若  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_3$  和  $\omega$  足够小, 且 (8.38) 成立, 就可以对每个重标度集合  $(\tilde{\mathbb{T}}^V, \tilde{Y}^V)_{\rho/\tau' \times \rho/\theta \times 1}$  应用估计  $\mathcal{F}(\sigma, \omega)$  (回忆定义 5.4 及注 5.6 情形 3), 以  $\varepsilon_3$  代替  $\varepsilon$ , 并以  $32\sqrt{\varepsilon_2}/\omega$  代替  $\eta$ 。得到

$$\left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}[V]} \tilde{Y}^V(\tilde{T}^V) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon_3} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^\omega \tilde{m}^{-1}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V]) |\tilde{T}^V| \left( \tilde{m}^{-3/2} \tilde{\ell}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V]) |\tilde{T}^V|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \quad (8.39)$$

其中

$$\tilde{m} = C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}[V]) \leq C_{KT-CW}(\tilde{\mathbb{T}}) \leq m \quad \text{且} \quad \tilde{\ell} = C_{F-SW}(\tilde{\mathbb{T}}[V]) \lesssim \delta^{-\varepsilon_2}. \quad (8.40)$$

(第一个不等式使用了 (8.29)。) 另一方面, 若 (8.38) 不成立, 则 (8.39) 可由其左端至少等于一个单独着色的体积而得到; 可选取一根管使

$$|\tilde{Y}^V(T^V)| \gtrsim \delta^{2\varepsilon_2} |T^V| = \delta^{2\varepsilon_2} \frac{\rho^2}{\tau'\theta} \geq \delta^{2\varepsilon_2} \rho^2 \geq \delta^{3\varepsilon_2} \geq \delta^{\varepsilon_3}. \quad (8.41)$$

由于  $\sigma \in (0, 2/3]$ , 由注 5.5 与注 5.6 情形 3,

$$\tilde{m}^{-1}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])|\tilde{T}^V|\left(\tilde{m}^{-3/2}\tilde{\ell}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])|\tilde{T}^V|^{1/2}\right)^{-\sigma} \lesssim 1. \quad (8.42)$$

结合 (8.41) 与 (8.42), 即得 (8.39) 在 (8.38) 不成立时也成立。因此无论 (8.38) 成立与否, (8.39) 都成立。

撤销缩放  $\phi_V$ , 并代入 (8.40) 中的  $\tilde{m}, \tilde{\ell}$ , 得到

$$\left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}[V]} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| \gtrsim \delta^{2\varepsilon_3} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^\omega m^{-1}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])|\tilde{T}| \left(m^{-3/2}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])\frac{|\tilde{T}|^{1/2}}{|V|^{1/2}}\right)^{-\sigma}. \quad (8.43)$$

由 (8.33)、(8.35) (回忆已将  $\tilde{Y}'$  重命名为  $\tilde{Y}$ ) 和 (8.43),

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| &\gtrsim \tau^\beta \sum_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} \sum_{V \in \mathcal{V}_{T_\tau}} \left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}[V]} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| \\ &\gtrsim \delta^{2\varepsilon_3+\beta} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^\omega m^{-1}(\#\tilde{\mathbb{T}})|\tilde{T}| \left(m^{-3/2}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])\frac{|\tilde{T}|^{1/2}}{|V|^{1/2}}\right)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

接着, 由 (8.32), 以及  $(\tilde{\mathbb{T}}'[T_\tau], Y')_\rho$  是  $(\mathbb{T}[T_\tau], \tilde{Y})_\rho$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化, 有  $C_{F-CW}(\tilde{\mathbb{T}}^W) \lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_2}$ 。由 (8.29),  $\#\tilde{\mathbb{T}} \gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2} \left(m \frac{|W|}{|\tilde{T}|}\right)$ 。由于

$$\#\tilde{\mathbb{T}}[V] \leq C_{F-CW}(\tilde{\mathbb{T}}^W) \frac{|V|}{|W|} (\#\tilde{\mathbb{T}}) \lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_2} \frac{|V|}{|W|} \left(m \frac{|W|}{|\tilde{T}|}\right),$$

结合 (8.31)、(8.36)、(8.37) 与 (8.44), 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| &\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_3+\beta-\zeta\sigma/2} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^\omega m^{-1} \left(m \frac{|W|}{|\tilde{T}|}\right) |\tilde{T}| \left(m^{-1} \left(m \frac{|V|}{|\tilde{T}|}\right) \frac{|\tilde{T}|^{1/2}}{|V|^{1/2}}\right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_3+\beta-\zeta\sigma/4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |W|. \end{aligned} \quad (8.45)$$

**步骤 8.** 分析 (8.45)。其左端集合包含在尺寸为  $s \times t \times 1$  的棱柱  $W$  中。其次,  $\varepsilon_3$  和  $\beta$  在  $\zeta$  与  $\sigma$  之后选取, 因此可以令前两者足够小, 使  $\delta^{-2\varepsilon_3+\beta-\zeta\sigma/4} \geq \delta^{-\zeta\sigma/5}$ 。

于是由抽屉原理, 可选取一个半径为  $\theta$  的球  $B$  (回忆  $\rho \leq \theta \leq s$ ), 满足

$$\left| B \cap \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| \gtrsim_\delta \delta^{-\zeta\sigma/5} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |B|. \quad (8.46)$$

回忆步骤 4 开始时固定了  $Z \in \mathcal{Z}$ 。 $\rho$ -管  $\tilde{\mathbb{T}}$  是  $\mathcal{P}_3\langle Z \rangle$  中棱柱在映射  $\phi_Z$  下的像。令  $B^\dagger = \phi_Z^{-1}(B)$ , 则  $B^\dagger$  是尺寸  $\theta_\rho^a \times \theta_c \times \theta_c$  的椭球。由 (8.46),

$$\left| B^\dagger \cap \bigcup_{P \in \mathcal{P}_1} Y_1(P) \right| \gtrsim_\delta \delta^{-\zeta\sigma/5} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |B^\dagger|. \quad (8.47)$$

令  $1 \leq i \leq \varepsilon_1^{-1}$  满足  $\delta^{i\varepsilon_1} \leq \theta \frac{a}{\rho} < \delta^{(i-1)\varepsilon_1}$ 。该  $i$  存在，因为  $\theta \in [\rho, 1]$  且  $\delta \leq \frac{a}{\rho} = \frac{ac}{b} \leq c \leq 1$ 。回忆  $\tau_i = \delta^{i\varepsilon_1}$ ，所以  $\theta a/\rho \leq \tau_i \delta^{-\varepsilon_1}$  蕴含  $\rho/\theta \geq \delta^{\varepsilon_1} a/\tau_i \geq \delta^{1+\varepsilon_1}/\tau_i$ 。于是存在半径为  $\tau_i$  的球  $B_{\tau_i}$ ，使

$$\lambda_i \geq \left| B_{\tau_i} \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_1(T) \right| |B_{\tau_i}|^{-1} \geq \delta^{3\varepsilon_1 - \zeta\sigma/5} \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega + \sigma} \geq \delta^{4\varepsilon_1 - \zeta\sigma/5} \left( \frac{\delta}{\tau_i} \right)^{\omega} \frac{|T|^{\sigma/2}}{|T_{\tau_i}|^{\sigma/2}}. \quad (8.48)$$

结合 (8.25) 与 (8.48)，只要选取  $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{100}\zeta\sigma$  并令  $\alpha$  足够小，就得到引理 8.3 的结论 (A)。

这结束了 (8.37) 成立时的分析。以下假设 (8.37) 不成立。

**步骤 9.** 回到步骤 7 开头，但不再假设 (8.37)，而是假设

$$\theta < \delta^{\zeta/10} \tau'. \quad (8.49)$$

非正式地说，(8.49) 表示  $\mathcal{V}_{T_\tau}$  中棱柱  $V$  是扁平的。

回忆步骤 4、5 中固定了  $Z \in \mathcal{Z}$  与  $W \in \mathcal{W}_Z$ 。本步骤再固定一根  $\tau$ -管  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$  和一个  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱  $V \in \mathcal{V}_{T_\tau}$ 。定义  $\mathbb{T}^\dagger = \tilde{\mathbb{T}}[V]$ ，令  $Y^\dagger$  为  $\tilde{Y}$  在  $\mathbb{T}^\dagger$  上的限制。因此  $(\mathbb{T}^\dagger, Y^\dagger)_\rho$  是包含在  $V$  中的一族  $\rho$ -管，并有

$$C_{F-SW}((\mathbb{T}^\dagger)^V) \lesssim_\delta \delta^{-\varepsilon_2}. \quad (8.50)$$

经抽屉化，可假设  $(\mathbb{T}^\dagger, Y^\dagger)_\rho$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。

对每根“柄”  $T_0^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger$ ，定义“发刷”

$$\mathcal{H}(T_0^\dagger) = \{T^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger : Y^\dagger(T_0^\dagger) \cap Y^\dagger(T^\dagger) \neq \emptyset\}.$$

我们声称，对每根  $T_0^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger$ ，集合

$$N_{(\tau'/\theta)\rho}(T_0^\dagger) \cap \bigcup_{T^\dagger \in \mathcal{H}(T_0^\dagger)} Y^\dagger(T^\dagger) \quad (8.51)$$

包含在一个尺寸可与  $\rho \times (\tau'/\theta)\rho \times 1$  比较的长方棱柱中，记为  $X = X(T_0^\dagger)$ 。这是直接的几何事实，见图 13。定义  $Y(X)$  为集合 (8.51)，故  $Y(X) \subset X$ 。

接下来声称：若  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_3$  足够小，则对  $\mathbb{T}^\dagger$  中  $\gtrsim_\delta 1$  比例的管  $T_0^\dagger$ ，有

$$|Y(X)| \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_3} |X|, \quad \text{其中 } X = X(T_0^\dagger). \quad (8.52)$$

估计 (8.52) 说明着色  $Y(X)$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_3}$ -稠密。这是一个标准 Córdoba 型  $L^2$  论证。简述如下：令  $Y^\ddagger(T^\dagger) \subset Y^\dagger(T^\dagger)$  为正则着色（定义 5.8），且  $|Y^\ddagger(T^\dagger)| \geq \frac{1}{2}|Y^\dagger(T^\dagger)|$ 。由抽屉原理， $\mathbb{T}^\dagger$  中  $\gtrsim_\delta 1$  比例的管  $T_0^\dagger$  满足

$$|\{x \in Y^\ddagger(T_0^\dagger) : \#\mathbb{T}_{Y^\ddagger}^\dagger(x) \geq \frac{1}{4}\#\mathbb{T}_{Y^\ddagger}^\dagger(x)\}| \gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_1} |T_0^\dagger|. \quad (8.53)$$

对 (8.53) 左端集合中的每个点  $x$ ，可选取一根  $T^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger$ ，使  $x \in Y^\ddagger(T)$  且  $\angle(\text{dir}(T_0^\dagger), \text{dir}(T^\dagger)) \gtrsim_\delta \tau$ （回忆步骤 5 中已把  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  精化为相对于  $T_\tau$  以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广）。从 (8.53) 左端取一个  $\delta/\tau$ -分离点集，并考虑对应管  $\{T^\dagger\}$ 。由于每个  $Y^\ddagger(T^\dagger)$  正则，这些着色限制在  $X$  中后的体积之和满足

$$\sum_{\{T^\dagger\}} |Y^\ddagger(T^\dagger) \cap X| \gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_1} |X|.$$

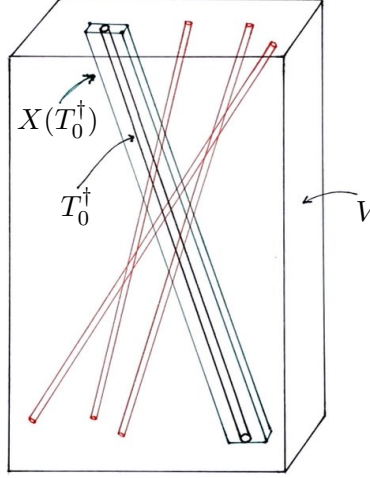


图 13: 图中所有红色管都与黑色柄管  $T_0^\dagger$  相交。由于每根管都包含在  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱  $V$  中, 每根管与平面  $\Pi(V)$  的夹角都为  $\lesssim \theta/\tau'$ 。又因为每根红色管都与  $T_0^\dagger$  相交, 所以这些管的并与  $T_0^\dagger$  的  $(\tau'/\theta)\rho$ -邻域, 被包含在绿色棱柱  $X = X(T_0^\dagger)$  中, 其尺寸为  $\frac{\theta}{\tau'} \cdot (\frac{\tau'}{\theta})\rho \times (\frac{\tau'}{\theta})\rho \times 1 = \rho \times (\frac{\tau'}{\theta})\rho \times 1$ 。

最后用 Córdoba 型  $L^2$  论证证明对应着色  $\{Y^\dagger(T)\}$  在  $X$  中几乎不相交, 即得 (8.52)。略滥用记号, 我们进一步精化  $\mathbb{T}^\dagger$ , 使每个  $T^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger$  都满足 (8.52)。经二进抽屉原理, 并把  $\mathbb{T}^\dagger$  替换为一个  $\approx_\delta 1$  精化 (仍记为  $\mathbb{T}^\dagger$ ), 可选取一个数  $M$  以及一族本质不同的  $\rho \times \frac{\tau'\rho}{\theta} \times 1$  棱柱  $\mathcal{X}$ , 其基数为  $\#\mathcal{X} = M^{-1}(\#\mathbb{T}^\dagger)$ , 并满足:

- (a) 对每个  $X \in \mathcal{X}$ , 约有  $\sim M$  根  $T^\dagger \in \mathbb{T}^\dagger$  满足  $T^\dagger \subset X$  且  $X(T^\dagger)$  与  $X$  可比较。记这一管族为  $\mathbb{T}_X^\dagger$ 。
- (b) 对所有  $X \in \mathcal{X}$ , 集合  $\mathbb{T}^\dagger[X]$  的基数相同 (至多相差因子 2)。

注意  $\mathbb{T}_X^\dagger \subset \mathbb{T}^\dagger[X]$ , 但两者未必相等; 可能有  $\#\mathbb{T}^\dagger[X]$  远大于  $\#\mathcal{X}$ 。特别地,  $\mathbb{T}^\dagger = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{T}_X^\dagger$ , 但  $\mathcal{X}$  未必是  $\mathbb{T}^\dagger$  的分割覆盖。例如,  $\mathbb{T}^\dagger[X]$  中可能存在一根管同时包含在另一个棱柱  $V'$  中; 这根管也将包含在  $\mathbb{T}_{X'}^\dagger$  中, 其中  $X'$  的方向与  $V'$  相容 (回忆图 13)。因此  $X$  与  $X'$  可能横截相交。

**步骤 10.** 步骤 9 固定了一根  $\tau$ -管  $T_\tau \in \mathbb{T}_\tau$  和一个  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱  $V \in \mathcal{V}_{T_\tau}$ , 并构造一对  $(\mathcal{X}, Y)_{\rho \times \frac{\tau'\rho}{\theta} \times 1}$ 。  $\mathcal{X}$  依赖于  $V$ , 因此记为  $\mathcal{X}_V$ 。本步骤分析不同  $\mathcal{X}_V$  之间的相互作用。

定义  $\mathcal{V} = \bigcup_{T_\tau \in \mathbb{T}_\tau} \mathcal{V}_{T_\tau}$ 。注意  $\mathcal{V}$  是包含在  $W$  中的一族  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱 ( $W$  在步骤 5 固定)。步骤 9 中的  $M$  依赖于  $V$ , 但经抽屉化并精化  $\mathcal{V}$ , 可假设对每个  $V \in \mathcal{V}$ ,  $M$  相同 (至多相差因子 2)。

先考虑

$$\#\mathbb{T}_X^\dagger \sim M \leq \delta^{-\zeta/100} \frac{|X|}{|\mathbb{T}^\dagger|}. \quad (8.54)$$

我们将证明引理 8.3 的结论 (A) 成立。

回忆图 13:  $X \in \mathcal{X}_V$  与  $V$  的方向相容, 即  $X^V$  的尺寸可与  $\frac{\rho}{\theta} \times \frac{\rho}{\theta} \times 1$  比较。因此记  $(\mathcal{X}_V^V, Y^V)_{\frac{\rho}{\theta} \times \frac{\rho}{\theta} \times 1}$  为  $(\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}, Y_V)_{\frac{\rho}{\theta}}$ 。

我们声称

$$\text{这些集合 } \left\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}_V} Y(X), V \in \mathcal{V} \right\} \text{ 的重叠度 } \leq \delta^{-\beta}. \quad (8.55)$$

该声称由 (8.33) 与 (8.35) 结合得到, 并注意  $\tau^{-\beta} \leq \delta^{-\beta}$ 。

对每个  $V \in \mathcal{V}$ , 有

$$C_{F-SW}(\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}) \lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_2}. \quad (8.56)$$

这是因为  $C_{F-SW}(\tilde{\mathbb{T}}^V) \lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_2}$  (回忆  $\mathcal{V}$  关于 Frostman 薄板 Wolff 公理以较小误差从下方因子分解  $\tilde{\mathbb{T}}$ ), 而步骤 9 的 (b) 表明每个  $X \in \mathcal{X}_V$  包含的  $\tilde{\mathbb{T}}[V]$  中管数相同 (至多相差因子 2)。因此  $C_{F-SW}(\mathcal{X}_V^V) \lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_2}$ , 即 (8.56)。

定义

$$m_{\frac{\rho}{\theta}} = mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}, \quad (8.57)$$

其中  $m$  见 (8.29), 且  $|X| = \rho \times \frac{\tau'}{\theta} \rho \times 1 = \frac{\tau'}{\theta} \rho^2$ 。于是

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}) \lesssim_{\delta} mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|} \leq m_{\frac{\rho}{\theta}}. \quad (8.58)$$

最后,

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} (\#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}) \gtrsim_{\delta} M^{-1} \#\tilde{\mathbb{T}}[W] \gtrsim mM^{-1} \frac{|W|}{|\tilde{T}|}, \quad (8.59)$$

最后一步使用 (8.29)。

固定  $V \in \mathcal{V}$ 。对  $(\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}, Y_V)_{\rho/\theta}$  应用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ , 以  $\varepsilon_4$  代替  $\varepsilon$ , 并用 (8.56), 有

$$\left| \bigcup_{T_{\frac{\rho}{\theta}} \in \mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}} Y_V(T_{\frac{\rho}{\theta}}) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2} \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega} m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-1} (\#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}) |T_{\frac{\rho}{\theta}}| \left( m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-3/2} (\#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}) |T_{\frac{\rho}{\theta}}|^{1/2} \right)^{-\sigma}. \quad (8.60)$$

这里使用了 (8.58) 以及  $\sigma \leq 2/3$ ; 后者允许把  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V})$  替换为可能更大的  $m_{\frac{\rho}{\theta}}$ 。撤销缩放  $\phi_V$ , 并利用 (8.55), 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} Y(\tilde{T}) \right| &\geq \left| \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \bigcup_{X \in \mathcal{X}_V} Y(X) \right| \\ &\geq \delta^{\beta} \sum_{V \in \mathcal{V}} \left| \bigcup_{X \in \mathcal{X}_V} Y(X) \right| \\ &\geq \delta^{\beta} \frac{|X|}{|T_{\frac{\rho}{\theta}}|} \sum_{V \in \mathcal{V}} \left| \bigcup_{T_{\frac{\rho}{\theta}} \in \mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V}} Y_V(T_{\frac{\rho}{\theta}}) \right| \\ &\gtrsim_{\delta} \delta^{\beta} \frac{|X|}{|T_{\frac{\rho}{\theta}}|} \cdot \delta^{\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2} \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega} m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-1} \left( \sum_{V \in \mathcal{V}} \#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V} \right) |T_{\frac{\rho}{\theta}}| \left( m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-3/2} \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} \#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V} \right) |T_{\frac{\rho}{\theta}}|^{1/2} \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_{\delta} \delta^{\beta + 2\varepsilon_4} \frac{|X|}{|T_{\frac{\rho}{\theta}}|} \cdot \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega} m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-1} \left( mM^{-1} \frac{|W|}{|\tilde{T}|} \right) |T_{\frac{\rho}{\theta}}| \left( m_{\frac{\rho}{\theta}}^{-3/2} \left( \sup_{V \in \mathcal{V}} \#\mathbb{T}_{\frac{\rho}{\theta}, V} \right) |T_{\frac{\rho}{\theta}}|^{1/2} \right)^{-\sigma}, \end{aligned} \quad (8.61)$$

最后一行使用 (8.59)。代入 (8.57) 并化简, 得到

$$\begin{aligned}
\text{左端 (8.61)} &\gtrsim_{\delta} \delta^{\beta+2\varepsilon_4} \frac{|X|}{|T_{\theta}|} \cdot \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega} \left(mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}\right)^{-1} \left(mM^{-1} \frac{|W|}{|\tilde{T}|}\right) |T_{\theta}| \\
&\quad \cdot \left(\left(mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}\right)^{-3/2} \left(\sup_{V \in \mathcal{V}} \#\mathbb{T}_{\theta,V}\right) |T_{\theta}|^{1/2}\right)^{-\sigma} \\
&\gtrsim_{\delta} \delta^{\beta+2\varepsilon_4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega} |W| \left(mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}\right)^{\sigma/2} \left(\left(mM^{-1} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}\right)^{-1} \left(M^{-1} \left(\sup_{V \in \mathcal{V}} \#\tilde{\mathbb{T}}[V]\right)\right) |T_{\theta}|^{1/2}\right)^{-\sigma} \\
&\gtrsim_{\delta} \delta^{-\sigma\zeta/4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega} |W| \left(m^{-1} \frac{|\tilde{T}|}{|X|} \left(\#\tilde{\mathbb{T}}[V]\right) |T_{\theta}|^{1/2}\right)^{-\sigma},
\end{aligned} \tag{8.62}$$

其中第二个不等式使用对每个  $V \in \mathcal{V}$  都有  $\#\mathbb{T}_{\theta,V} \sim M^{-1}(\#\tilde{\mathbb{T}}[V])$ ; 第三个不等式使用 (8.31)、(8.54)、 $|T^{\dagger}| = |\tilde{T}|$ , 以及  $\beta, \varepsilon_4$  相对于  $\sigma\zeta$  足够小。注意, (8.62) 左端的集合包含在  $W$  中, 而右端含有因子  $|W|$ 。因此 (8.62) 给出了  $\bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} \tilde{Y}(\tilde{T})$  在  $W$  内的密度下界。该下界含有因子  $\delta^{-\sigma\zeta/4}$ , 它远大于 1, 最终将使我们得到引理 8.3 的结论 (A)。

分析最后的括号项  $(\dots)^{-\sigma}$ 。有

$$\begin{aligned}
m^{-1} \frac{|\tilde{T}|}{|X|} \left(\#\tilde{\mathbb{T}}[V]\right) |T_{\theta}|^{1/2} &\leq m^{-1} \frac{|\tilde{T}|}{|X|} \left(C_{F-CW}(\tilde{\mathbb{T}}^W) \frac{|V|}{|W|} \left(\#\tilde{\mathbb{T}}[W]\right)\right) |T_{\theta}|^{1/2} \\
&\lesssim_{\delta} m^{-1} \frac{|\tilde{T}|}{|X|} \left(\frac{|V|}{|W|} \left(m \frac{|W|}{|\tilde{T}|}\right)\right) |T_{\theta}|^{1/2} \\
&= \frac{|V|}{|X|} |T_{\theta}|^{1/2} \\
&= \frac{\theta}{\rho},
\end{aligned} \tag{8.63}$$

其中第二个不等式使用了 (8.32) 与 (8.29)。

结合 (8.62) 与 (8.63), 得到

$$\left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} Y(\tilde{T}) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{-\sigma\zeta/4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |W|. \tag{8.64}$$

**步骤 11.** 现在可以仿照步骤 8。(8.64) 左端集合包含在尺寸为  $s \times t \times 1$  的  $W$  中, 并且  $\delta \leq \rho \leq \theta \leq s \leq 1$ 。因此存在半径为  $\theta$  的球  $B_{\theta}$ , 满足

$$\left| B_{\theta} \cap \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} Y(\tilde{T}) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{-\sigma\zeta/4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |B_{\theta}|.$$

回忆步骤 4 开头固定了  $Z \in \mathcal{Z}$ 。 $\rho$ -管  $\tilde{\mathbb{T}}$  是  $\mathcal{P}_3\langle Z \rangle$  中棱柱在  $\phi_Z$  下的像。令  $B^{\dagger} = \phi_Z^{-1}(B_{\theta})$ ; 它是尺寸为  $\theta_{\rho}^a \times \theta c \times \theta c$  的椭球, 并满足

$$\left| B^{\dagger} \cap \bigcup_{T_1 \in \mathbb{T}_1} Y_1(T) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{-\sigma\zeta/4} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{\omega+\sigma} |B^{\dagger}|.$$

这与 (8.47) 对应。完全相同的论证（特别注意  $a \in [\delta, 1]$ ）表明，只要取  $\alpha < \sigma\zeta/10$ ，引理 8.3 的结论 (A) 成立。因此 (8.54) 成立的情形分析结束。

**步骤 12.** 回到步骤 10 开头，但改为假设

$$M > \delta^{-\zeta/100} \frac{|X|}{|\tilde{T}|}. \quad (8.65)$$

概括当前情形：

- 已固定  $Z \in \mathcal{Z}$ （尺寸为  $\frac{a}{\rho} \times c \times c$ ）和  $W \in \mathcal{W}_Z$ ；
- 有一族包含在  $W$  中的  $\rho$ -管  $\tilde{\mathbb{T}}$ ；
- 有一族包含在  $W$  中的  $\theta \times \tau' \times 1$  棱柱  $\mathcal{V}$ ；
- 对每个  $V \in \mathcal{V}$ ，有一族  $\rho \times \frac{\tau'}{\theta} \rho \times 1$  棱柱  $\mathcal{X}_V$ ，以及分割  $\tilde{\mathbb{T}}[V] = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}_V} (\tilde{\mathbb{T}}[V])_X$ ；
- 每个  $(\tilde{\mathbb{T}}[V])_X$  的基数约为  $M$ ，且  $M$  满足 (8.65)；
- $\tilde{\mathbb{T}}$  上有着色  $\tilde{Y}$ ，使  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。

令  $\mathcal{X} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{X}_V$ （略滥用记号，因为步骤 9 中  $\mathcal{X}$  表示固定  $V$  后的  $\mathcal{X}_V$ ）。为简化记号，定义  $\tilde{\mathbb{T}}_X = (\tilde{\mathbb{T}}[V])_X$ ，其中  $V$  是满足  $X \in \mathcal{X}_V$  的唯一棱柱。由于  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\rho$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密，对  $\mathcal{X}$  作无害精化后，可假设每对  $(\tilde{\mathbb{T}}_X, \tilde{Y})_\rho$  都是  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密，其中  $\tilde{Y}$  为原着色在  $\tilde{\mathbb{T}}_X$  上的限制。

对每个  $X \in \mathcal{X}$  的  $(\tilde{\mathbb{T}}_X, \tilde{Y})_\rho$  应用推论 7.10（寻找宽广尺度）。得到尺度  $\tilde{\rho}$  以及一个  $\gtrsim_\delta 1$  精化  $(\tilde{\mathbb{T}}'_X, \tilde{Y}')_\rho$ ，它相对于某个  $\tilde{\rho}$ -管平衡分割覆盖以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。

经二进抽屉原理并精化  $\mathcal{X}$ ，可假设推论 7.10 给出的尺度  $\tilde{\rho}$  对每个  $X$  都相同。我们声称

$$\tilde{\rho} \gtrsim_\delta \delta^{-\zeta/200} \rho. \quad (8.66)$$

验证如下。对每个  $X \in \mathcal{X}$ ，集合  $\{\tilde{Y}'(\tilde{T}) : \tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}'_X\}$  的重叠度至多为  $\lesssim_\delta (\tau'/\tilde{\rho})^\beta (\tilde{\rho}/\rho)$ 。原因是，通过公共点  $x$  的  $\tilde{\mathbb{T}}'_X$  中的管，其方向限制在单位球面  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  上一个  $\rho \times \tau'$  区域内。由于这些管本质不同且通过同一点，其方向彼此  $\rho$ -分离。因此，在一个  $S^2$  上的  $\rho \times \tilde{\rho}$  区域内至多有  $\rho/\tilde{\rho}$  根管，而对计数有贡献的不同  $\tilde{\rho}$ -管至多为  $(\tau'/\tilde{\rho})^\beta$  根。于是

$$\left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}'_X} \tilde{Y}'(\tilde{T}) \right| \gtrsim_\delta \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tau'} \right)^\beta \left( \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \right) \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}'_X} |\tilde{Y}'(\tilde{T})| \geq \delta^{-\zeta/200} \left( \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \right) |X|,$$

其中第二个不等式使用 (8.65) 和  $\beta < \zeta/200$ 。左端包含在  $X$  中，故得到 (8.66)。

接着，对每个  $X \in \mathcal{X}$ ，存在一族本质不同、包含在  $X$  内的  $\rho \times \tilde{\rho} \times 1$  棱柱  $\{U\}$ ，它们构成  $\tilde{\mathbb{T}}'_X$  的分割覆盖；且对每个这样的  $U$ ， $(\tilde{\mathbb{T}}'_X[U], \tilde{Y}')_\rho$  相对于以  $\text{dir}(U)$  为中心、直径  $\tilde{\rho}$  的帽以误差  $\lesssim_\delta 1$  宽广。见图 14。

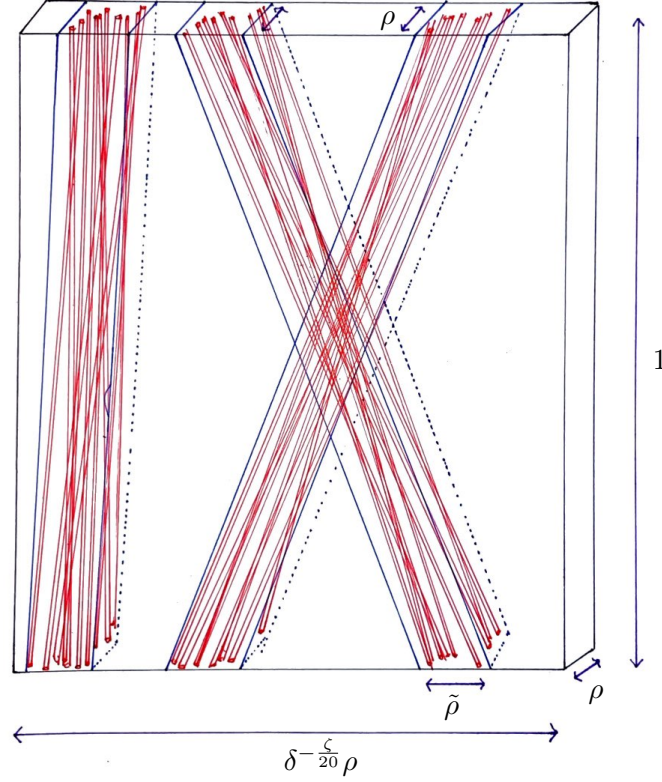


图 14: 在黑色棱柱  $X$  内找到一族蓝色的  $\rho \times \tilde{\rho} \times 1$  棱柱, 它们构成红色管族  $\tilde{\mathbb{T}}'_X$  的分割覆盖。同一个蓝色  $\rho \times \tilde{\rho} \times 1$  棱柱中的典型一对管, 以约为  $\tilde{\rho}$  的角度相交。

对每个这样的棱柱  $U$ , 定义

$$Y(U) = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}'_X[U]} \tilde{Y}'(\tilde{T}).$$

一个 Córdoba 型  $L^2$  论证表明: 对每个使  $(\tilde{\mathbb{T}}'_X[U], \tilde{Y}')$  为  $\gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密的  $U$  (其中  $\tilde{Y}'$  是  $\tilde{\mathbb{T}}'_X$  上着色在  $\tilde{\mathbb{T}}'_X[U]$  的限制), 有  $|Y(U)| \gtrsim_\delta \delta^{8\varepsilon_2} |U|$ 。令  $\mathcal{U}$  为当  $X$  遍历  $\mathcal{X}$  时所有满足该性质的  $U$  的集合。注意,  $\mathcal{U}$  中棱柱未必本质不同。

**步骤 13.** 本步骤撤销前一步中的各种变换与重标度, 并理解棱柱  $U$  及其着色  $Y(U)$  在原始空间 (即  $\mathbb{T}$  与  $\mathcal{P}$  所在的空间) 中对应什么。

步骤 12 中固定了  $Z \in \mathcal{Z}$  和  $W \in \mathcal{W}_Z$ 。回忆  $\tilde{\mathbb{T}}$  来自  $(\mathcal{P}_5(Z))^Z$ , 是一族  $\rho \times \rho \times 1$ -管。我们得到一族  $\rho \times \tilde{\rho} \times 1$  棱柱  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{W,Z}$  (这里的  $\mathcal{U}$  与步骤 3 中用来引入  $\mathcal{Z}$  的  $\mathcal{U}$  不同), 以及这些棱柱上的着色  $Y(U)$ ; 这些棱柱都包含在  $W$  中。撤销线性变换  $\phi_Z$ , 得到棱柱族  $\phi_Z^{-1}(\mathcal{U}_{W,Z})$ 。经抽屜化, 可假设其尺寸为  $\tilde{a} \times \tilde{b} \times c$ , 其中  $\tilde{a} \geq a$ 、 $\tilde{b} \geq b$ 。因为  $\phi_Z$  使体积改变因子  $(a/\rho)c^2$ , 有  $(\tilde{a}\tilde{b}) = ac\tilde{\rho}$ 。 $\tilde{a}, \tilde{b}$  依赖于  $W, Z$ , 但经抽屜化可假设它们对所有  $Z \in \mathcal{Z}$  和  $W \in \mathcal{W}_Z$  相同 (至多相差因子 2)。我们声称 (只要  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_3$  足够小), 要么

$$\tilde{a} \leq \delta^{-\varepsilon_3} a, \tag{8.67}$$

要么引理 8.3 的结论 (A) 成立 (只需按  $\varepsilon_3$  取  $\alpha$  足够小)。论证与引理 8.2 步骤 1 完全相同。

以下假设 (8.67) 成立。略滥用记号, 重新定义  $\tilde{\rho} = \tilde{b}/c$ ; 这可能使  $\tilde{\rho}$  至多减小因子  $\delta^{\varepsilon_3}$ , 因此 (8.66) 可弱化为  $\tilde{\rho} \geq \delta^{-\zeta/400} \rho$ 。按此定义显然  $\tilde{b} = \tilde{\rho}c$ 。

令

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \bigcup_{W \in \mathcal{W}_Z} \phi_Z^{-1}(\mathcal{U}_{Z,W}).$$

对形如  $Q = \phi_Z^{-1}(U)$  的每个  $Q \in \mathcal{Q}$ , 定义  $Y(Q) = \phi_Z^{-1}(Y(U))$ , 并定义  $\mathcal{P}_Q \subset \mathcal{P}[Q]$  为  $\phi_Z^{-1}(\tilde{\mathbb{T}}'_X[U])$ , 其中  $X$  是与  $U$  关联的  $\rho \times \frac{\tau}{\theta}\rho \times 1$  棱柱 (见步骤 12)。至此得到:

- 每个  $Q \in \mathcal{Q}$  是尺寸  $\tilde{a} \times \tilde{b} \times c$  的棱柱, 且  $\tilde{b} = \tilde{\rho}c$ 。
- 对每个  $Q \in \mathcal{Q}$ , 有  $\mathcal{P}_Q \subset \mathcal{P}[Q]$ 。令  $\mathcal{P}' = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{P}_Q$ 。存在着色  $Y'(P) \subset Y(P)$ , 使  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  是  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的一个  $\gtrsim_{\delta} \delta^{2\varepsilon_2}$  精化。
- 每个  $Q \in \mathcal{Q}$  具有着色

$$Y(Q) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_Q} Y'(P).$$

并满足  $|Y(Q)| \gtrsim_{\delta} \delta^{8\varepsilon_2} |Q|$ 。

- 对每个  $Q \in \mathcal{Q}$  和每个  $x \in Y(Q)$ , 满足  $x \in Y'(P)$  的  $P \in \mathcal{P}_Q$  的方向, 在以  $\text{dir}(Q)$  为中心、半径为  $\tilde{b}/c$  的帽内以误差  $\lesssim_{\delta} 1$  宽广 (它们对应于  $\rho \times \tilde{\rho} \times 1$  棱柱  $U$  中以误差  $\lesssim_{\delta} 1$  宽广的管  $\tilde{\mathbb{T}}'_X[U]$  及其着色)。
- 由  $(\mathcal{P}', Y')_{a \times b \times c}$  对  $(\mathcal{P}, Y)_{a \times b \times c}$  的精化所诱导的  $(\mathbb{T}, Y)_{\delta}$  精化, 是  $\gtrsim_{\delta} \delta^{2\varepsilon_2}$ -稠密。若记为  $(\mathbb{T}', Y')_{\delta}$ , 则

$$\bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Y(Q).$$

$(\mathcal{Q}, Y)_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times c}$  已具备引理 8.3 结论 (C) 的部分性质。对每个  $Q \in \mathcal{Q}$ ,  $\text{dir}(Q)$  定义到精度  $\tilde{\rho}$ 。因此精化  $\mathcal{Q}$  与  $\mathbb{T}'$  后, 可找到一族  $\tilde{\rho}$ -管  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  以及分割  $\mathcal{Q} = \bigsqcup_{T_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{T}_{\tilde{\rho}}} \mathcal{Q}_{T_{\tilde{\rho}}}$ , 使每个  $Q \in \mathcal{Q}_{T_{\tilde{\rho}}}$  包含在  $T_{\tilde{\rho}}$  中, 并满足  $\angle(\text{dir}(Q), \text{dir}(T_{\tilde{\rho}})) \leq \tilde{\rho}$ 。

固定  $Q \in \mathcal{Q}_{T_{\tilde{\rho}}}$  和  $x \in Y(Q)$ 。所有满足  $x \in Y'(P)$  的  $P \in \mathcal{P}_Q$  都满足  $\angle(\text{dir}(P), \text{dir}(Q)) \leq \tilde{\rho}$ ; 这些方向彼此  $\rho$ -分离, 并且在以  $\text{dir}(Q)$  为中心、直径  $\tilde{\rho}$  的帽内, 在尺度  $\geq \rho$  上以误差  $\lesssim_{\delta} 1$  宽广。对每个这样的  $P$  (它包含在一根  $\rho$ -管  $T_{\rho}$  中), 满足  $x \in Y'(T)$  的  $T \in \mathbb{T}[T_{\rho}]$  在以  $\text{dir}(P)$  为中心、直径  $\rho$  的帽内, 在尺度  $\geq \delta$  上以误差  $\lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_2}$  宽广。因此, 由引理 7.13 (不同尺度的宽广性可组合) 以及定义 7.1 第 (ii)、(iii) 项, 与点  $x \in Y(Q)$  关联的  $T \in \mathbb{T}'$  的方向, 在以  $\text{dir}(Q)$  为中心、直径  $\tilde{\rho}$  的帽内, 在尺度  $\geq \delta$  上以误差  $\lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_2}$  宽广。

虽然引理 7.13 的结论针对多重集, 但这里对普通集合也成立。事实上, 定义 7.1 第 (ii) 项说明: 对每个  $x \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_{T_{\tilde{\rho}}}} Y(Q)$ , 当  $P$  遍历  $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_{T_{\tilde{\rho}}}} \mathcal{P}_Q$  中包含在  $T_{\tilde{\rho}}$  内的元素时, 集合  $\{\text{dir}(T) :$

$T \in \mathbb{T}[T_\rho]$  且  $x \in Y'(T) \cap Y'(P)$  两两不交。因此可以构造覆盖  $\mathbb{T}'$  的一族  $\tilde{\rho}$ -管  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ , 使  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  相对于  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_2}$  宽广。

**步骤 14.** 我们要证明  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ 、 $\mathcal{Q}$  及其着色  $Y$ 、以及  $\tilde{\mathbb{T}}$  满足引理 8.3 的结论 (C)。首先,  $\mathcal{Q}$  中棱柱可能不是本质不同的。可用引理 8.2 证明步骤 5 的同一论证修复: 把  $\mathcal{Q}$  中可比较的棱柱合并为一个棱柱。所得棱柱族记为  $\tilde{\mathcal{P}}$ ; 它们本质不同, 尺寸可与  $\tilde{a} \times \tilde{b} \times c$  比较。令  $\tilde{Y}$  为  $\tilde{\mathcal{P}}$  上的着色, 即对  $Q \subset \tilde{P}$  的着色  $Y(Q)$  取并。定义

$$\mathcal{P}_{\tilde{P}} = \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Q} \\ Q \subset \tilde{P}}} \mathcal{P}_Q.$$

若  $P \in \mathcal{P}_{\tilde{P}}$ , 则  $\angle(\text{dir}(P), \text{dir}(\tilde{P})) \lesssim \tilde{b}/c = \tilde{\rho}$ 。因此必要时把  $\tilde{a}, \tilde{b}$  放大一个常数因子, 可以保证: 若 (i)  $T \cap P \neq \emptyset$ , (ii)  $T$  从  $P$  的长端退出, 且 (iii)  $P \in \mathcal{P}_{\tilde{P}}$ , 则  $T \cap \tilde{P} \neq \emptyset$ , 且  $T$  从  $\tilde{P}$  的长端退出。

此时  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  与  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{Y})_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times c}$  已满足引理 8.3 结论 (C) 的部分要求, 其情形与引理 8.2 证明步骤 5 末尾一致。

现在重复引理 8.2 证明步骤 6–8 的同一论证。于是要么引理 8.3 的结论 (A) 成立, 要么存在一族  $\mathbb{T}_{\tilde{\rho}}$ , 以及  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  与  $(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{Y})_{\tilde{a} \times \tilde{b} \times c}$  的进一步精化, 使引理 8.3 结论 (C) 的第 (i)、(ii)、(iii) 项成立。第 (iv) 项也成立, 因为  $\tilde{\rho} \geq \delta^{-\zeta/400} \rho$ 。因此引理 8.3 的结论 (C) 成立。□

## 9 精细尺度归纳论证

本节目标是证明: 若  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  是一族  $\delta$ -管, 则要么  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$  的体积大于断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  中估计 (1.3) 所预期的大小; 要么存在尺度  $\delta \ll \rho \ll 1$  和一族  $\rho$ -管, 它们关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理以及 Frostman 薄板 Wolff 公理, 从上方与下方对  $\mathbb{T}$  进行因子分解。精确陈述如下。

**命题 9.1.** 令  $\omega, \zeta > 0$ 、 $\sigma \in (0, 2/3]$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则存在  $\alpha, \eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 并假设  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$  且  $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则下列情形至少有一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}. \quad (9.1)$$

(B) 存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ , 它是  $\delta^\zeta$ -稠密的; 存在一个数  $\rho \in [\delta^{1-\omega/100}, \delta^{\omega/100}]$ , 以及一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_\rho$ , 使其关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理和 Frostman 薄板 Wolff 公理, 均以误差  $\leq \delta^{-\zeta}$  从上方和下方对  $\mathbb{T}'$  进行因子分解。

**证明. 步骤 1.** 令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  为下文选取的小数。我们将使  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2$  足够小, 而  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_3$  足够小。这些数依赖于  $\omega, \sigma$ , 和  $\zeta$ 。再使  $\eta$  与  $\alpha$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小。

对  $(\mathbb{T}, Y)$  应用命题 7.5 (双尺度颗粒分解), 其中以  $\varepsilon_1$  代替  $\zeta$ ; 令  $\alpha_1 = \alpha_1(\omega, \sigma, \varepsilon_1)$  为该命题输出。若命题 7.5 的结论 (A) 成立, 则只要选取  $\alpha \leq \alpha_1$ , 式 (9.1) 成立, 证明结束。

下面假设命题 7.5 的结论 (B) 成立。令  $\rho, c, (\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta, \mathbb{T}_\rho$  以及  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times \rho c \times c}$  为命题 7.5 结论 (B) 的输出。

对  $\mathbb{T}_\rho$  应用命题 4.6 (凸集因子分解)。我们得到  $\mathbb{T}_\rho$  的一个  $\approx_\rho 1$  精化；它又诱导  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的一个  $\approx_\rho 1$  精化。滥用记号，仍分别记为  $\mathbb{T}_\rho$  和  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ 。同时得到一族全等凸集  $\mathcal{Z}$ ：它关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理从上方对  $\mathbb{T}_\rho$  因子分解，并关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方对  $\mathbb{T}_\rho$  因子分解，二者误差均为  $\lesssim_\rho 1$ 。此外，

$$\#\mathbb{T}_\rho[Z] \gtrsim_\rho C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho)|Z||T_\rho|^{-1} \quad \text{对每个 } Z \in \mathcal{Z}. \quad (9.2)$$

若  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \leq \delta^{-\zeta}$ ，则只要选取  $\varepsilon_1 \leq \zeta/2$ ， $(\mathbb{T}_1, Y_1)$  与  $\mathbb{T}_\rho$  就满足命题 9.1 的结论 (B)，证明结束。事实上，由注 4.3(A)，有  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_\rho) \lesssim C_{F-SW}(\mathbb{T}_1) \lesssim_\delta \delta^{-\eta_1 - \varepsilon_1} \leq \delta^{-\zeta}$ ；而由注 4.3(B)，对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ，有  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_1^{T_\rho}) \lesssim C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。

**步骤 2.** 下面考虑  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) > \delta^{-\zeta}$  的情形，因此

$$\#\mathbb{T}_\rho[Z] \gtrsim \delta^{-\zeta} \frac{|Z|}{|T_\rho|} \quad \text{对每个 } Z \in \mathcal{Z}. \quad (9.3)$$

目标是证明，只要适当选择  $\alpha > 0$ ，命题 9.1 的结论 (A) 成立。

先证明：要么结论 (A) 已成立，要么  $\mathcal{Z}$  中的棱柱几乎是管。设  $\mathcal{Z}$  中棱柱的尺寸为  $t \times \theta \times 2$ 。若  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2, \omega, \sigma$  足够小，则以  $\varepsilon_2$  代替  $\varepsilon$  应用命题 5.2，得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_1(T) \right| \gtrsim \delta^{\omega + \varepsilon_2} \left( \frac{\theta}{t} \right)^\omega (\#\mathbb{T})|T|((\#\mathbb{T})|T|^{1/2})^{-\sigma}, \quad (9.4)$$

其中隐含常数依赖于  $\varepsilon_2$ 。因此可假设

$$t \geq \delta^{\varepsilon_3} \theta, \quad (9.5)$$

否则，只要  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \omega / 2$  且  $\alpha \leq \varepsilon_3 \omega / 2$ ，命题 9.1 的结论 (A) 已成立。把每个  $t \times \theta \times 2$  棱柱  $Z \in \mathcal{Z}$  替换为与其同轴的  $\theta$ -管。经过二进鸽巢并把  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  与  $\mathbb{T}_\rho$  替换为  $\approx_\delta 1$  精化，可以找到  $\mathbb{T}_\rho$  的一个平衡覆盖  $\mathbb{T}_\theta$ ；该覆盖关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方、关于 Katz–Tao Wolff 公理从上方对  $\mathbb{T}_\theta$  因子分解，二者误差均为  $\lesssim_\delta \delta^{-\varepsilon_3}$ 。

式 (9.3) 蕴含：对每个  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$ ，有  $\#\mathbb{T}_\rho[T_\theta] \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_3 - \zeta} (\theta/\rho)^2$ ，从而

$$\#\mathbb{T}_\rho \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_3 - \zeta} (\theta/\rho)^2 (\#\mathbb{T}_\theta). \quad (9.6)$$

**步骤 3.** 对每个  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$ ，定义

$$\mathcal{G}_{T_\theta} = \bigcup_{T_\rho \in \mathbb{T}_\rho[T_\theta]} \mathcal{G}_{T_\rho}.$$

我们断言：要么结论 (A) 成立（适当选择  $\alpha$ ），要么存在  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times \rho c \times c}$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化，使下述性质成立： $a \in [\delta, \delta^{1 - \varepsilon_1}]$ ；并且对每个  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$  和每个  $G \in \mathcal{G}_{T_\theta}$ ，所有满足  $Y(G) \cap Y(G') \neq \emptyset$  的

$G' \in \mathcal{G}_{T_\theta}$  都包含在一个尺寸可与  $\frac{\theta\delta^{1-\varepsilon_2}}{\rho} \times \theta c \times c$  比较的棱柱中（相比之下， $G$  的尺寸为  $a \times \rho c \times c$ ）。该论证与引理 8.3 步骤 1、2 完全相同，细节从略。

下文假设：对每个  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$  和  $G \in \mathcal{G}_{T_\theta}$ ，所有满足  $Y(G) \cap Y(G') \neq \emptyset$  的  $G' \in \mathcal{G}_{T_\theta}$  都包含在一个尺寸可与  $\frac{\theta\delta^{1-\varepsilon_2}}{\rho} \times \theta c \times c$  比较的棱柱中。

**步骤 4.** 通过二进鸽巢，可以找到一个数  $\mu_{\text{fine}}$ ，并对  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  与  $\mathbb{T}_\rho$  作  $\approx_\delta 1$  精化，使对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  和每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]} Y_1(T)$ ，都有

$$\#((\mathbb{T}_1[T_\rho])_{Y_1}(x)) \sim \mu_{\text{fine}}.$$

这些精化可以选取到仍满足：对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ， $(\mathbb{T}_1^{T_\rho}, Y_1^{T_\rho})_{\delta/\rho}$  是  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1}$ -稠密的，且  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_1^{T_\rho}) \lesssim_\delta \delta^{-\varepsilon_1}$ （并仍有  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_1^{T_\rho}) \leq \delta^{-\eta}$ ）。

若  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2$  足够小，则可应用估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ ，对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_\rho]} Y_1(T) \right| \gtrsim \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{\omega+\varepsilon_2} (\#\mathbb{T}_1[T_\rho]) |T| \left( (\#\mathbb{T}_1[T_\rho]) \left( \frac{|T|}{|T_\rho|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma},$$

其中隐含常数依赖于  $\varepsilon_2$ 。结合 (9.6)，得到

$$\mu_{\text{fine}} \lesssim \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{-\omega-\varepsilon_2} \left( \frac{\#\mathbb{T}_1}{\#\mathbb{T}_\rho} \frac{\delta}{\rho} \right)^\sigma \lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_3+\sigma\zeta} \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{-\omega} \left( \frac{\#\mathbb{T}_1}{\#\mathbb{T}_\theta} \frac{\delta\rho}{\theta^2} \right)^\sigma. \quad (9.7)$$

**步骤 5.** 在以往的尺度归纳应用中，通常会把估计 (9.7) 与  $\mathbb{T}_\rho$  中管的重数估计配合。本文的新意在于：我们改而将 (9.7) 与  $\mathcal{G}$  的重数估计配合。

把  $(\mathcal{G}, Y)_{a \times \rho c \times c}$  再精化一个  $\approx_\delta 1$  因子（从而也相应精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$ ），可找到一个数  $\mu_{\text{medium}}$ ，使对每个  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$  和每个  $x \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}_{T_\theta}} Y(G)$ ，都有

$$\#\{G \in \mathcal{G}_{T_\theta} : x \in Y(G)\} \sim \mu_{\text{medium}}.$$

下面估计  $\mu_{\text{medium}}$ 。回顾步骤 3 的结论，可以用尺寸可与  $\frac{\theta\delta^{1-\varepsilon_2}}{\rho} \times \theta c \times c$  比较的长方棱柱  $P$  覆盖  $T_\theta$ ，使任意满足  $Y(G) \cap Y(G') \neq \emptyset$  的  $G, G' \in \mathcal{G}_{T_\theta}$  都包含在同一个这样的棱柱中。记这族棱柱为  $\mathcal{P}$ 。对每个  $P \in \mathcal{P}$ ， $\mathcal{G}_{T_\theta}^P$  是一族棱柱，每个尺寸约为  $\frac{\rho}{\theta} \times \frac{\rho}{\theta} \times 1$ ；更精确地，每个棱柱尺寸可与  $s \times t \times 1$  比较，其中  $s, t \in [\delta^{\varepsilon_2} \frac{\rho}{\theta}, \frac{\rho}{\theta}]$ 。这个额外的  $\delta^{\varepsilon_2}$  因子无关紧要。经过鸽巢，可以假设对所有  $T_\theta \in \mathbb{T}_\theta$  和所有  $P \in \mathcal{P}$ ， $s, t$  都相同。

我们有  $C_{KT-CW}(\mathcal{G}_{T_\theta}^P) \lesssim \delta^{-\varepsilon_2} C_{KT-CW}^{\text{loc}}(\mathcal{G}) \leq \delta^{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}$ ，且

$$C_{F-SW}(\mathcal{G}_{T_\theta}^P) \leq C_{F-CW}(\mathcal{G}_{T_\theta}^P) \leq C_{KT-CW}(\mathcal{G}_{T_\theta}^P) (\rho/\theta)^{-2} (\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P)^{-1} \leq \delta^{-\varepsilon_1-2\varepsilon_2} (\rho/\theta)^{-2} (\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P)^{-1}.$$

若  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_3, \omega, \sigma$  足够小，则可应用断言  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ ，得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{G^P \in \mathcal{G}_{T_\theta}^P} Y^P(G^P) \right| &\geq \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega+\varepsilon_3} \delta^{5\varepsilon_2} (\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P) |G^P| \left( [(\rho\theta)^{-2} (\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P)^{-1}] [\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P] [|G^P|^{1/2}] \right)^{-\sigma} \\ &\gtrsim_\delta \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^{\omega+\varepsilon_3} \delta^{5\varepsilon_2} (\#\mathcal{G}_{T_\theta}^P) |G^P| \left( \frac{\rho}{\theta} \right)^\sigma, \end{aligned}$$

从而

$$\mu_{\text{medium}} \lesssim_{\delta} \delta^{-2\varepsilon_3} \left(\frac{\rho}{\theta}\right)^{-\omega-\sigma}. \quad (9.8)$$

**步骤 6.** 至此已经估计了  $\mu_{\text{fine}}$  与  $\mu_{\text{medium}}$ 。前者控制对颗粒中某一给定点有贡献的  $\delta$ -管数, 后者控制对一根  $\theta$ -管中某一给定点有贡献的颗粒数。

还需在  $\mathbb{T}_{\theta}$  上放置一个稠密着色, 并得到相应的重数估计, 以控制对  $\mathbb{R}^3$  中某一给定点有贡献的  $\theta$ -管数。通过二进鸽巢, 可以精化  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_{\delta}$  和  $\mathbb{T}_{\rho}$ , 使对每个  $T_{\theta} \in \mathbb{T}_{\theta}$  和每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_{\theta}]} Y_1(T)$ ,  $|B(x, \theta) \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_{\theta}]} Y(T)|$  的体积大致相同。令  $Y(T_{\theta}) = T_{\theta} \cap N_{\theta}(\bigcup_{T \in \mathbb{T}_1[T_{\theta}]} Y_1(T))$ ; 则  $(\mathbb{T}_{\theta}, Y)_{\theta}$  是  $\gtrsim_{\delta} \delta^{\varepsilon_1}$ -稠密的。再经鸽巢可找到一个数  $\mu_{\text{coarse}}$ , 使

$$\#(\mathbb{T}_{\theta})_Y(x) \sim \mu_{\text{coarse}} \quad \text{对每个 } x \in \bigcup_{T_{\theta} \in \mathbb{T}_{\theta}} Y(T_{\theta}).$$

由注 4.3(A),  $C_{F-SW}(\mathbb{T}_{\theta}) \lesssim C_{F-SW}(\mathbb{T}) \lesssim_{\delta} \delta^{-\varepsilon_1}$ ; 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\theta}) \lesssim \delta^{-\varepsilon_3} C_{KT-CW}(\mathcal{Z}) \lesssim_{\delta} \delta^{-\varepsilon_3}$ 。因此若  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2$  足够小, 可应用  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  得到

$$\left| \bigcup_{T_{\theta} \in \mathbb{T}_{\theta}} Y(T_{\theta}) \right| \gtrsim \theta^{\omega+\varepsilon_2+\varepsilon_3} (\#\mathbb{T}_{\theta}) |T_{\theta}| \left( (\#\mathbb{T}_{\theta}) |T_{\theta}|^{1/2} \right)^{-\sigma},$$

进而

$$\mu_{\text{coarse}} \lesssim \theta^{-\omega-\varepsilon_2-\varepsilon_3} \left( (\#\mathbb{T}_{\theta}) \theta \right)^{\sigma}. \quad (9.9)$$

结合 (9.7)、(9.8) 与 (9.9), 可知对每个  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} \#\{T \in \mathbb{T}_1 : x \in Y_1(T)\} &\leq \mu_{\text{fine}} \mu_{\text{medium}} \mu_{\text{coarse}} \\ &\lesssim \delta^{-4\varepsilon_3+\sigma\zeta} \delta^{-\omega} \left( (\#\mathbb{T}) \delta \right)^{\sigma}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

因此

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim_{\delta} \delta^{\omega+4\varepsilon_3-\sigma\zeta} (\#\mathbb{T}_1) |T| \left( (\#\mathbb{T}) |T|^{1/2} \right)^{-\sigma}.$$

由于  $\#\mathbb{T}_1 \gtrsim_{\delta} \delta^{\varepsilon_1} (\#\mathbb{T})$ , 只要选取  $\varepsilon_3 < \sigma\zeta/10$  且  $\alpha < \sigma\zeta/10$ , 结论 (A) 成立。□

## 10 每一尺度均满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理的管族之黏性挂谷定理

在第 6 节, 我们回顾了 [26] 中证明的黏性挂谷定理的一个版本, 即定理 6.2。定理 6.2 适用于定义 6.1 意义下在每一尺度都满足 Frostman 凸 Wolff 公理的管族。本节证明其一个对应版本: 管族在每一尺度都满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。

**定义 10.1.** 令  $K \geq 1, \delta > 0$ 。若对每个  $\rho_0 \in [\delta, 1]$ , 都存在  $\rho \in [\rho_0, K\rho_0]$  和一族  $\rho$ -管  $\mathbb{T}_{\rho}$ , 满足下列性质, 则称一族本质不同的  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  在每一尺度都以误差  $K$  满足 Katz–Tao Wolff 公理。

(i)  $\mathbb{T}_\rho$  是  $\mathbb{T}$  的一个  $K$ -平衡分割覆盖。

(ii)  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_\rho) \leq K$ 。

**定理 10.2.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  为一族  $\delta$ -管, 并在每一尺度都以误差  $\delta^{-\eta}$  满足 *Katz–Tao* 凸 *Wolff* 公理; 设  $Y(T)$  是一个  $\delta^\eta$ -稠密着色。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^\varepsilon (\#\mathbb{T}) |T|. \quad (10.1)$$

下一节将把定理 10.2 与命题 9.1 结合, 用以证明命题 1.7。定理 10.2 由定理 6.2 与下面的 Nikishin–Stein–Pisier 型因子分解结果共同推出。

**命题 10.3.** 令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $K_\varepsilon, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  是单位球内一族非空的  $\delta$ -管, 并在每一尺度都以误差  $\delta^{-\eta}$  满足 *Katz–Tao* 凸 *Wolff* 公理。则存在刚性变换  $A_1, \dots, A_N$ , 其中  $N \leq K_\varepsilon (\#\mathbb{T})^{-1} |T|^{-1}$ , 使每个  $A_i(\mathbb{T})$  都包含在  $B(0, 2)$  中, 并且  $\bigcup_{i=1}^N A_i(\mathbb{T})$  含有一个本质不同的管子集, 该子集在每一尺度都以误差  $K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}$  满足 *Frostman* 凸 *Wolff* 公理。

由命题 10.3 推出定理 10.2。固定  $\varepsilon > 0$ , 令  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  为下文确定的小量。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 并假设  $\mathbb{T}$  在每一尺度都以误差  $\delta^{-\eta}$  满足 *Katz–Tao* *Wolff* 公理。经过一个无害精化, 可假设对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 都有  $|Y(T)| \geq \delta^{2\eta} |T|$ 。

以一个较小的  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$  应用命题 10.3。只要  $\eta$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小即可。令  $\tilde{\mathbb{T}} \subset \bigcup_{i=1}^N A_i(\mathbb{T})$  为命题 10.3 的输出。注意, 每个  $\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}$  都可写成  $\tilde{T} = A_i(T)$ , 其中  $i$  为某个指标、 $T \in \mathbb{T}$ 。因此可定义着色  $\tilde{Y}(\tilde{T}) = A_i(Y(T))$ ; 有  $|\tilde{Y}(\tilde{T})| = |Y(T)| \geq \delta^{2\eta} |T|$ , 故  $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{Y})_\delta$  是  $\delta^{2\eta}$ -稠密的。

若  $\varepsilon_1$  与  $\eta$  相对于  $\varepsilon$  足够小, 则可应用定理 6.2, 得到

$$N \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| = \sum_{i=1}^N \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} A_i(Y(T)) \right| \geq \left| \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{T \in \mathbb{T}} A_i(Y(T)) \right| \geq \left| \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathbb{T}}} \tilde{Y}(\tilde{T}) \right| \geq \kappa_\varepsilon \delta^\varepsilon.$$

整理并利用  $N \leq K_\varepsilon (\#\mathbb{T})^{-1} |T|^{-1}$ , 得到 (10.1), 其中  $\kappa = \kappa_\varepsilon K_\varepsilon^{-1}$ 。□

还剩命题 10.3 需要证明。下面完成这一点。

## 10.1 Nikishin–Stein–Pisier 因子分解与凸 Wolff 公理

先证明命题 10.3 的单尺度版本。首先需要如下定义。

**定义 10.4.** 若对每个形如  $\rho = \delta \tau^{-\ell}$ 、 $\ell \in \mathbb{N}$  的尺度  $\rho \in [\delta, 1]$ ,  $\mathbb{T}$  都具有由  $\rho$ -管组成的平衡分割覆盖, 则称一族  $\delta$ -管  $\mathbb{T}$  具有粒度  $\tau \in [\delta, 1]$  的正则性。

**定义 10.5.** 对  $\rho > 0$ , 定义  $\mathfrak{A}_\rho$  为所有满足如下性质的刚性变换  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  的集合: 对所有  $x \in B(0, 1)$ , 都有  $|Ax - x| \leq \rho$ 。

**引理 10.6.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$  与  $K_\varepsilon \geq 1$ , 使得对所有  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$ , 下述结论成立。令  $K, M \geq 1$ , 并令  $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_K$  为  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  中若干族  $\delta$ -管, 每族基数至多为  $M$ 。假设每个  $\mathbb{T}_j$  中的管都具有粒度  $\delta^\eta$  的正则性, 并且每个  $\mathbb{T}_j$  都包含在一根  $\rho$ -管中。

则存在刚性变换集  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{A}_\rho$ , 其基数为  $\#\mathcal{A} = \lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \rceil$ , 并使

$$C_{KT-CW} \left( \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A(\mathbb{T}_j) \right) \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} (\log(2 + K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}_j), \quad j = 1, \dots, K. \quad (10.2)$$

注 10.7. 注意, 对不同的  $A, A' \in \mathcal{A}$ , 集合  $A(\mathbb{T}_j)$  与  $A'(\mathbb{T}_j)$  可能含有相同的管, 因此 (10.2) 左端的不交并应理解为多重集。由注 4.2(D), 该左端有良好定义。

证明.

**步骤 1.** 定义  $\tilde{\delta} = \delta/\rho$ 。首先可假设  $M < \tilde{\delta}^{-2}$ , 否则取  $\mathcal{A} = \{I\}$  即可, 其中  $I: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  为恒等映射。类似地, 可假设  $\rho \geq \delta^{1-\varepsilon/2}$ ; 否则令  $\mathcal{A}$  为  $\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \rceil$  个对  $I$  作无穷小扰动所得的副本, 并由

$$C_{KT-CW} \left( \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A(\mathbb{T}_j) \right) \leq (\#\mathcal{A}) C_{KT-CW}(\mathbb{T}_j).$$

即得 (10.2)。

固定  $j \in [1, \dots, K]$ , 令  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_j$ 。由假设,  $\mathbb{T}$  中所有管都包含在一根公共  $\rho$ -管中, 记为  $T_\rho$ 。固定  $\delta \leq a \leq b \leq 2\rho$ , 并要求  $a, b$  均形如  $\delta^{\ell\eta}$ 。令  $\nu \geq 1$  为 2 的幂。由假设,  $\mathbb{T}$  有一个平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_a$ 。

令  $\mathcal{W}_\nu$  为一族极大的本质不同的  $a \times b \times 2$  棱柱, 每个都满足  $\#\mathbb{T}[W] \in [\nu \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_a}, 2\nu \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_a}]$ 。注意, 每个  $W \in \mathcal{W}_\nu$  都包含在  $N_{2\rho}(T_\rho)$  中。若  $W$  是一个  $a \times b \times 2$  棱柱, 且  $T \in \mathbb{T}[T_a]$ 、 $T \subset W$ , 则  $T_a \subset 2W$ 。特别地, 由于  $\mathbb{T}_a$  是  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖,

$$\#\mathbb{T}_a[2W] \geq \nu/2 \quad \text{对每个 } W \in \mathcal{W}_\nu.$$

每根  $T_a \in \mathbb{T}_a$  至多包含在  $\lesssim \frac{b}{a}$  个本质不同的  $2a \times 2b \times 4$  棱柱中。因此双计数给出

$$\#\mathcal{W}_\nu \lesssim (\#\mathbb{T}_a) \frac{b}{a} \nu^{-1}. \quad (10.3)$$

当  $\nu$  不太大时该估计有用。若  $\nu \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_a} \geq C_{KT-CW}(\mathbb{T})(ab)|T|^{-1}$ , 则  $\mathcal{W}_\nu = \emptyset$ 。

**步骤 2.** 若两个刚性运动  $A, A' \in \mathfrak{A}_\rho$  满足: 存在  $x \in B(0, 1)$  使  $|A(x) - A'(x)| \geq \delta$ , 则称二者  $\delta$ -分离。令  $\mathfrak{A}_\rho^\delta$  为  $\mathfrak{A}_\rho$  的一个极大  $\delta$ -分离子集; 有  $\#\mathfrak{A}_\rho^\delta \sim \tilde{\delta}^{-6} = \delta^6/\rho^6$ 。

令

$$N = 2 \left\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \right\rceil, \quad (10.4)$$

并从  $\mathfrak{A}_\rho^\delta$  中均匀独立随机选取  $A_1, \dots, A_N$ 。有

$$\mathbb{P}(\#\{A_1, \dots, A_N\} \geq N/2) \geq 3/4, \quad (10.5)$$

其中  $\#\{A_1, \dots, A_N\}$  表示集合  $\{A_1, \dots, A_N\}$  中不同刚性运动的数量。

固定一个  $a \times b \times 2$  棱柱  $W_0$ 。我们要估计下述事件发生的概率：

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^N A_i(\mathbb{T})\right)[W_0] \geq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}) |W_0| |T|^{-1}, \quad (10.6)$$

也即估计

$$\sum_{i=1}^N \#\mathbb{T}[(A_i^{-1}(W_0))]\geq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}) |W_0| |T|^{-1}. \quad (10.7)$$

发生的概率。若 (10.7) 发生，则由鸽巢必存在某个二进  $\nu$ ，使

$$\#\{(W, i) \in (\mathcal{W}_\nu \times \{1, \dots, N\}) : A_i(W) \text{ 包含于 } 10W_0\} \geq Z_\nu, \quad (10.8)$$

其中

$$Z_\nu = (4 \log(1/\delta))^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}) |W_0| |T|^{-1} \left( \sup_{W \in \mathcal{W}_\nu} \#\mathbb{T}[W] \right)^{-1}. \quad (10.9)$$

可假设

$$\sup_{W \in \mathcal{W}_\nu} \#\mathbb{T}[W] \sim \nu \frac{\#\mathbb{T}}{\#\mathbb{T}_a} \leq C_{KT-CW}(\mathbb{T}) (ab) |T|^{-1}, \quad (10.10)$$

否则  $\mathcal{W}_\nu = \emptyset$ ，于是 (10.8) 与 (10.7) 均不可能成立。由于  $|W_0| = 2ab$ ，由 (10.10) 可估计  $Z_\nu$ ，得到

$$Z_\nu \geq (2 \log(1/\delta))^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)).$$

取常数  $K_\varepsilon$  足够大，使  $Z_\nu \geq 2$ ，特别地

$$Z_\nu - 1 \sim Z_\nu. \quad (10.11)$$

步骤 3 应用 Chernoff 不等式时会用到这一点。

**步骤 3.** 固定  $\nu$  与  $W_0$ ，估计 (10.8) 发生的概率。对两个均包含在  $N_{2\rho}(T_\rho)$  中的  $a \times b \times 2$  棱柱  $W, W_0$ ，使  $A(W)$  与  $W_0$  可比较（等价地， $A^{-1}(W_0)$  与  $W$  可比较）的  $A \in \mathfrak{A}_\rho^\delta$  的数量为  $\lesssim \delta^{-6} a^2 b^2 \rho \min\{a/b, \rho\}$ 。写成无量纲形式即  $\tilde{\delta}^{-6} \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 \min\{\tilde{a}/(\tilde{b}\rho), 1\} \leq \tilde{\delta}^{-6} \tilde{a}^2 \tilde{b}^2$ ，其中  $\tilde{a} = a/\rho$ 、 $\tilde{b} = b/\rho$ 。

这一计数的理由如下。不失一般性，设  $W_0 = [0, a] \times [0, b] \times [0, 2]$ 。刚性运动  $A$  由  $A(v_i)$  决定，其中  $v_0 = (0, 0, 0)$ ， $v_1 = (0, 1, 0)$ ， $v_2 = (0, 0, 1)$ 。由于  $A \in \mathfrak{A}_\rho^\delta$ ， $A(v_0)$  的  $\delta$ -分离选择数至多为  $\frac{|W \cap B(0, \rho)|}{\delta^3} \sim \frac{ab\rho}{\delta^3}$ 。固定  $A(v_0)$  后， $A(v_2)$  的  $\delta$ -分离选择数至多为  $\frac{ab}{\delta^2}$ 。再固定  $A(v_0), A(v_2)$  后， $A(v_1)$  的  $\delta$ -分离选择数至多为  $\min\{\frac{a}{b}, \rho\} \delta^{-1}$ 。

因此，若定义事件  $X_i$  为：存在  $W \in \mathcal{W}_\nu$  使  $A_i(W)$  与  $W_0$  可比较，则

$$\mathbb{P}(X_i) \lesssim \tilde{\delta}^{-6} \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 \cdot \#\mathfrak{A}_\rho^\delta \cdot \#\mathcal{W}_\nu \lesssim \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 (\#\mathcal{W}_\nu). \quad (10.12)$$

由于  $\mathcal{W}_\nu$  中的棱柱本质不同, 对任意  $i$ , 至多有  $O(1)$  个  $W \in \mathcal{W}_\nu$  使  $A_i(W)$  与  $W_0$  可比较。因此由期望的线性性,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(\#\{(W, i) \in (\mathcal{W}_\nu \times \{1, \dots, N\}): A_i(W) \text{ 与 } W_0 \text{ 可比较}\}\right) \\ &= \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_N) \\ &\lesssim N\tilde{a}^2\tilde{b}^2(\#\mathcal{W}_\nu) \\ &\lesssim 2\left\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \right\rceil \tilde{a}^2\tilde{b}^2(\#\mathcal{W}_\nu) \end{aligned}$$

第三行使用 (10.12); 第四行使用 (10.4) 与 (10.3)。

定义  $X = X_1 + \dots + X_N$ 。回顾 (10.9) 与 (10.11), 有

$$\begin{aligned} \gamma := \frac{Z_\nu}{\mathbb{E}(X)} &\gtrsim \log(1/\delta)^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}) |W_0| |T|^{-1} \left( 2 \left\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \right\rceil \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 \sup_{W \in \mathcal{W}_\nu} \#\mathbb{T}[W] \cdot (\#\mathcal{W}_\nu) \right)^{-1} \\ &\gtrsim \log(1/\delta)^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}) |W_0| |T|^{-1} \left( 2 \left\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \right\rceil \tilde{a}^2 \tilde{b}^2 \frac{b}{a} (\#\mathbb{T}) \right)^{-1} \\ &\gtrsim \log(1/\delta)^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2} (\log(2+K)) \end{aligned}$$

第二行使用 (10.3) 以及  $\#\mathbb{T}[W] \sim \nu \frac{\#\mathbb{T}}{\mathbb{T}_a}$ ; 第三行使用  $|T| \sim \delta^2$  与  $\tilde{a} = a/\rho$ ; 最后还使用了  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \geq 1$ 、 $\tilde{b}^2 \leq 4$ 、 $|W_0| = 2ab$  和  $\#\mathbb{T} \leq M$ 。

因此可应用乘法型 Chernoff 不等式, 得到

$$\mathbb{P}(X \geq Z_\nu) \leq \left( \frac{e^{\gamma-1}}{\gamma} \right)^{\mathbb{E}(X)} \lesssim e^{-\gamma \mathbb{E}(X)} = e^{-Z_\nu} \lesssim (2+K)^{-(\log 1/\delta)^{-1} K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/2}} \lesssim K^{-1} \exp[-K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/3}].$$

第二个不等式使用:  $K_\varepsilon$  足够大, 且对所有  $\delta > 0$ 、 $K \geq 1$ , 有  $\frac{e^{\gamma-1}}{\gamma} \leq e^{-\gamma}$ 。

**步骤 4.**  $\nu$  有  $\log(1/\delta)$  种选择; 本质不同的棱柱  $W_0$  至多有  $a^{-3}b^{-1} \leq \delta^{-4}$  个; 而数对  $(a, b)$  有  $\eta^{-2}$  种选择。因此, 存在某个  $W \subset N_{2\rho}(T_\rho)$ 、其尺寸为某个形如  $\delta^{\eta\ell}$  的  $a \leq b$  所对应的  $a \times b \times 2$ , 并且 (10.6) 成立的概率为  $\lesssim \delta^{-6} K^{-1} \exp[-K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon/3}]$ 。取  $K_\varepsilon$  足够大, 使该量至多为  $(2K)^{-1}$ 。若不存在这样的棱柱, 并且  $\eta \leq \varepsilon/4$ , 则

$$C_{KT-CW} \left( \bigsqcup_{i=1}^N A_i(\mathbb{T}) \right) \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} (\log(2+K)) C_{KT-CW}(\mathbb{T}). \quad (10.13)$$

事实上, 对任意尺寸  $a \times b \times 2$  的棱柱  $W \subset \mathbb{R}^3$ , 可选取  $W' \subset W$ , 其尺寸为  $a' \times b' \times 2$ , 且  $a', b'$  均形如  $\delta^{\ell\eta}$ , 并满足  $|W'| \leq \delta^{-2\eta}|W| \leq \delta^{-\varepsilon/2}|W|$ 。

特别地, (10.13) 以至少  $1 - (2K)^{-1}$  的概率成立。由于共有  $K$  族管  $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_K$ , 可知以至少  $1/2$  的概率, (10.13) 对所有这些管族同时成立。最后, 由 (10.5), 事件“ $\#\mathcal{A} \geq N/2$  且 (10.13) 对所有  $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_K$  成立”的概率至少为  $1/4$ 。故存在  $A_1, \dots, A_N$  的一种选择, 以及  $\mathcal{A} \subset \{A_1, \dots, A_N\}$ , 其基数为  $\left\lceil \frac{\rho^2}{M\delta^2} \right\rceil$ , 并使 (10.2) 成立。□

引理 10.6 有如下推论。

**推论 10.8.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$  与  $K_\varepsilon \geq 1$ , 使得对所有  $0 < \delta \leq \rho \leq 1$ , 下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  为一族  $\delta$ -管,  $\mathbb{T}_\rho$  为  $\mathbb{T}$  的平衡分割覆盖。假设对每个  $T_\rho \in \mathbb{T}_\rho$ ,  $\mathbb{T}^{T_\rho}$  都具有粒度  $(\delta/\rho)^\eta$  的正则性。

则存在刚性变换集  $\mathcal{A}$ , 其基数为  $\#\mathcal{A} = 2^{\lceil \frac{\#\mathbb{T}_\rho}{\#\mathbb{T}} \frac{|T_\rho|}{|T|} \rceil}$ , 并满足

$$A(T_\rho) \subset N_{3\rho}(T_\rho) \quad \text{对每个 } A \in \mathcal{A}, T_\rho \in \mathbb{T}_\rho, \quad (10.14)$$

且

$$C_{KT-CW}\left(\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(\mathbb{T})\right)[N_{3\rho}(T_\rho)]\right) \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \quad \text{对每个 } T_\rho \in \mathbb{T}_\rho. \quad (10.15)$$

注 10.9. 直接应用引理 10.6 只能得到稍弱的结论

$$C_{KT-CW}\left(\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(\mathbb{T}[T_\rho])\right)\right) \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \quad \text{对每个 } T_\rho \in \mathbb{T}_\rho,$$

但由  $\mathbb{T}_\rho$  中的管本质不同可推出 (10.15): 满足  $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(\mathbb{T}[T'_\rho]))[T_\rho]$  非空的  $T'_\rho \in \mathbb{T}_\rho$  至多有  $\lesssim 1$  根。

现在可以证明命题 10.3。

命题 10.3 的证明. **步骤 1.** 固定  $\varepsilon > 0$ . 令  $\varepsilon_1 > 0$  为下文选取的小量, 使  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon$  足够小、 $\eta$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小。设  $\mathbb{T}$  为一族  $\delta$ -管, 并在每一尺度都以误差  $\delta^{-\eta}$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。

只要选取  $\eta \leq \varepsilon$ , 就存在  $J \sim \varepsilon^{-1}$  以及尺度  $1 = \rho_0 > \rho_1 > \dots > \rho_J = \delta$ , 使每个  $j$  都有  $\delta^\varepsilon \leq \rho_{j+1}/\rho_j < 1/8$ , 并且对  $j = 0, \dots, J-1$ , 存在  $\mathbb{T}$  的一个  $\delta^{-\eta}$ -平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_{\rho_j}$ , 满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_{\rho_j}) \leq \delta^{-\eta}$ . 定义  $\mathbb{T}_{\rho_J} = \mathbb{T}$ 。

目前  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  覆盖  $\mathbb{T}$ , 但未必覆盖  $\mathbb{T}_{\rho_{j+1}}$ . 可如下修正。对每个  $j > 0$  与  $T_{\rho_{j+1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{j+1}}$ , 有  $\mathbb{T}[T_{\rho_{j+1}}] \neq \emptyset$ . 由于  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  覆盖  $\mathbb{T}$ , 存在  $T_{\rho_j} \in \mathbb{T}_{\rho_j}$ , 使  $\mathbb{T}[T_{\rho_{j+1}}] \cap \mathbb{T}[T_{\rho_j}] \neq \emptyset$ , 因而  $T_{\rho_{j+1}} \cap T_{\rho_j}$  含有单位线段。这蕴含  $T_{\rho_{j+1}} \subset N_{2\rho_{j+1}}(T_{\rho_j})$ . 于是对  $j = 0, \dots, J-1$ , 把  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  替换为  $\{N_{2\rho_{j+1}}(T_{\rho_j}) : T_{\rho_j} \in \mathbb{T}_{\rho_j}\}$  ( $\mathbb{T}_{\rho_J}$  不变), 即可使每个  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  覆盖  $\mathbb{T}_{\rho_{j+1}}$ . 此时  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  仍是  $\mathbb{T}$  的  $\lesssim \delta^{-\eta}$ -平衡覆盖, 从而是  $\mathbb{T}_{\rho_{j+1}}$  的  $\lesssim \delta^{-2\eta}$ -平衡覆盖。继续滥用记号称其为  $\mathbb{T}_{\rho_j}$ . 严格地说其中元素是  $(\rho_j + 2\rho_{j+1})$ -管; 由于  $\rho_{j+1} \leq \rho_j/4$ , 这一差异无关紧要。注意, 此时  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  中的管可能不再本质不同, 也可能不再是  $\mathbb{T}$  的分割覆盖。

**步骤 2.** 经过二进鸽巢, 可以把每个  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  替换为一个子集 (仍记为  $\mathbb{T}_{\rho_j}$ ), 使  $\#\mathbb{T}_{\rho_j} \gtrsim \#\mathbb{T}$ , 并且对每个  $j = 0, \dots, J$  满足下列性质。为简化记号, 定义  $\tilde{T}_{\rho_j} = N_{3\rho_j}(T_{\rho_j})$ , 以及  $\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j} = \{\tilde{T}_{\rho_j} : T_{\rho_j} \in \mathbb{T}_{\rho_j}\}$ 。

- (i)  $\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}$  中的管本质不同。
- (ii) 对每个  $T_{\rho_j} \in \mathbb{T}_{\rho_j}$ , 有  $\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j+1}}[\tilde{T}_{\rho_j}] = \tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j+1}}[T_{\rho_j}]$ 。
- (iii)  $\mathbb{T}_{\rho_j}$  是  $\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j+1}}$  的平衡分割覆盖。
- (iv) 对每个  $T_{\rho_j} \in \mathbb{T}_{\rho_j}$ ,  $(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j+1}})^{T_{\rho_j}}$  具有粒度  $(3\rho_j/\rho_{j+1})^{\eta_1}$  的正则性。

对每个  $j = 1, \dots, J$ , 应用推论 10.8: 以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ , 以  $\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}$  代替  $\mathbb{T}$ , 以  $\mathbb{T}_{\rho_{j-1}}$  代替  $\mathbb{T}_\rho$ , 以  $3\rho_j$  代替  $\delta$ , 并以  $3\rho_j/\rho_{j-1}$  代替  $\rho$ . 令  $\mathcal{A}_j$  为所得输出。

由 (10.14) 与上述 (ii), 对每个  $T_{\rho_{j-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{j-1}}$ ,

$$\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_j} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}[\tilde{T}_{\rho_{j-1}}]) = \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_j} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}[T_{\rho_{j-1}}]) \subset \tilde{T}_{\rho_{j-1}}, \quad (10.16)$$

再由 (iii),

$$\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j-1}} \text{ 覆盖 } \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_j} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}). \quad (10.17)$$

这里不交并按多重集理解。

有

$$\#\left(\left(\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_j} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j})\right)[\tilde{T}_{\rho_{j-1}}]\right) \geq (\#\mathcal{A}_j) \left(\frac{\#\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}}{2\#\mathbb{T}_{\rho_{j-1}}}\right) \gtrsim \frac{|T_{\rho_{j-1}}|}{|T_{\rho_j}|} \quad \text{对每个 } T_{\rho_{j-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{j-1}}. \quad (10.18)$$

由 (10.15), 存在  $C_{\varepsilon_1} \geq 1$ , 使

$$C_{KT-CW}\left(\left(\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}_j} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j})\right)[\tilde{T}_{\rho_{j-1}}]\right) \leq C_{\varepsilon_1} \delta^{-\varepsilon_1-2\eta} \quad \text{对每个 } \tilde{T}_{\rho_{j-1}} \in \tilde{\mathbb{T}}_{\rho_{j-1}}. \quad (10.19)$$

**步骤 3.** 定义  $\mathcal{A}^{(0)} = \{I\}$ , 对  $j = 1, \dots, J$  定义

$$\mathcal{A}^{(j)} = \{A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_j : A_i \in \mathcal{A}_i \text{ 对每个 } i = 1, \dots, j\}.$$

定义  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(J)}$ ; 这就是命题 10.3 的输出变换集。

对  $j = 0, \dots, J$ , 定义

$$\hat{\mathbb{T}}_{\rho_j} = \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}^{(j)}} A(\tilde{\mathbb{T}}_{\rho_j}).$$

由 (10.17), 对每个  $j = 1, \dots, J$ ,  $\hat{\mathbb{T}}_{\rho_{j-1}}$  覆盖  $\hat{\mathbb{T}}_{\rho_j}$ .

由 (10.18), 对每个  $1 \leq j \leq J$  和  $T_{\rho_{j-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{j-1}}$ ,

$$\#\hat{\mathbb{T}}_{\rho_j}[\tilde{T}_{\rho_{j-1}}] \gtrsim \frac{|T_{\rho_{j-1}}|}{|T_{\rho_j}|}.$$

因此经过二进鸽巢, 可把每个  $\hat{\mathbb{T}}_{\rho_j}$  替换为一个精化  $\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}$  (按多重集意义), 使对每个  $j = 1, \dots, J$ ,  $\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_{j-1}}$  是  $\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}$  的平衡分割覆盖, 并且对每个  $T_{\rho_{j-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{j-1}}$ ,

$$\#\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}[\tilde{T}_{\rho_{j-1}}] \gtrsim \delta^\eta \frac{|T_{\rho_{j-1}}|}{|T_{\rho_j}|},$$

从而

$$\#\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J}[\tilde{T}_{\rho_j}] \gtrsim \delta^{\eta/\varepsilon} \frac{|T_{\rho_j}|}{|T|} \quad \text{对每个 } \tilde{T}_{\rho_j} \in \hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}. \quad (10.20)$$

**步骤 4.** 由引理 4.12 与 (10.19),

$$C_{KT-CW}(\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J}) \leq C_{KT-CW}(\hat{\mathbb{T}}_{\rho_J}) \lesssim \prod_{j=1}^J (C_{\varepsilon_1} \delta^{-\varepsilon_1-2\eta}) \lesssim \delta^{-2\varepsilon_1 J}.$$

特别地, 对每个  $T \in \hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J}$ , 至多有  $\lesssim \delta^{-2\varepsilon_1 J}$  根  $T' \in \hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J}$  与  $T$  可比较。回忆  $J \sim \varepsilon^{-1}$ 。取  $\varepsilon_1$  足够小, 使  $2\varepsilon_1 J < \varepsilon/4$ 。于是可选取  $\mathbb{T}^\dagger \subset \hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A(\hat{\mathbb{T}}_{\rho_J})$ , 满足  $\#\mathbb{T}^\dagger \gtrsim \delta^{\varepsilon/4}(\#\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_J}) \geq \delta^\varepsilon |T|^{-1}$  且其中管本质不同。该  $\mathbb{T}^\dagger$  就作为命题 10.3 的输出。

还需验证  $\mathbb{T}^\dagger$  在每一尺度都以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  满足 Frostman 凸 Wolff 公理。只需注意: 对  $j = 0, \dots, J-1$ ,  $\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}$  是  $\mathbb{T}^\dagger$  的一个  $\delta^{-\varepsilon/4} 2^{J-j}$ -平衡分割覆盖。因此若取  $\eta < \varepsilon^2/2$ , 则对每个  $\tilde{T}_{\rho_j} \in \hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}$ , 由 (10.20) 得

$$C_{F-CW}((\mathbb{T}^\dagger)^{\tilde{T}_{\rho_j}}) \leq \frac{C_{KT-CW}(\mathbb{T}^\dagger) |\tilde{T}_{\rho_j}|}{\#\mathbb{T}^\dagger[\tilde{T}_{\rho_j}]} \lesssim \delta^{-\eta/\varepsilon} C_{KT-CW}(\mathbb{T}^\dagger) \leq \delta^{-\eta/\varepsilon-\varepsilon/4} C_{KT-CW}(\hat{\mathbb{T}}'_{\rho_j}) \leq \delta^{-\varepsilon}. \quad \square$$

## 11 多尺度分析与命题 1.7 的证明

本节目标是结合命题 9.1 与定理 10.2, 证明命题 1.7。

**引理 11.1.** 令  $\sigma \in (0, 2/3]$ 、 $\omega, \varepsilon > 0$ 、 $N \geq 1$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则存在  $\eta, \alpha, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则下列情形至少有一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}.$$

(B) 存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ; 存在  $J \leq 2^N$ ; 尺度  $\delta = \rho_J < \rho_{J-1} < \dots < \rho_0 = 1$ ; 以及管族  $\mathbb{T}_{\rho_j}$ ,  $j = 0, \dots, J$ , 满足

(i) 对每个  $i = 0, \dots, J-1$ , 有  $\rho_{i+1}/\rho_i \geq \delta^{(1-\omega/100)^N}$ 。

(ii)  $\mathbb{T}' = \mathbb{T}_{\rho_J}$ , 且  $\mathbb{T}_{\rho_0}$  只含一根 1-管。

(iii) 对每个  $i = 1, \dots, J-1$  和每个  $T_{\rho_{i-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i-1}}$ ,  $\mathbb{T}_{\rho_i}^{T_{\rho_{i-1}}}$  关于 Katz-Tao 凸 Wolff 公理和 Frostman 薄板 Wolff 公理, 以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  从上方和下方对  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_{i-1}}}$  进行因子分解。

证明.

**步骤 1.** 用关于  $N$  的归纳证明。  $N = 0$  时几乎无需证明: 由于  $\mathbb{T}$  中的管都包含在单位球中, 可选取一个  $\sim 1$  精化  $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ , 使其包含在一根 1-管中。此时  $J = 1$ , 结论 (B) 总成立 ( $J = 1$  时其中 (iii) 为空虚命题)。

现在假设结论对  $N-1$  已成立。令  $\theta \in (0, 2/3]$ ,  $\varepsilon, \omega > 0$ 。令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta, \alpha, c > 0$  为下文确定的小量： $\varepsilon_1$  依赖于  $\varepsilon, N, \theta, \omega$ ； $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小； $\eta, \alpha, c$  相对于  $\varepsilon_2$  足够小。

设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密，并满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。若  $\eta$  相对于  $\omega, \sigma, \varepsilon_2$  足够小，则可用  $\varepsilon_2$  代替  $\varepsilon$  应用归纳假设；令  $\alpha_1 = \alpha_1(\omega, \sigma, \varepsilon_2, N-1)$  为相应的  $\alpha$ 。

若归纳假设的结论 (A) 成立，则只要  $\alpha \leq \alpha_1$ ，本引理的结论 (A) 也成立。否则，结论 (B) 成立：存在一个  $\delta^{\varepsilon_2}$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ；尺度  $\delta = \rho_J < \rho_{J-1} < \dots < \rho_0 = 1$ ，其中  $J \leq 2^{N-1}$  且  $\rho_{i+1}/\rho_i \geq \delta^{(1-\omega/100)^{N-1}}$ ；以及满足结论 (B) 的管族  $\mathbb{T}_{\rho_j}$ ，其中把  $\varepsilon$  替换为  $\varepsilon_2$ 。

将  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  以及每个  $\mathbb{T}_{\rho_i}$  再精化一个  $(\log 1/\delta)^{-J} \geq (\log 1/\delta)^{-2^N}$  因子，可以在  $\mathbb{T}_{\rho_i}$  上构造着色  $Y_{\rho_i}$ ，满足：

- (a)  $|Y_{\rho_0}(T_{\rho_0})| \gtrsim (\log 1/\delta)^{-2^N} \delta^\eta$ ，其中  $T_{\rho_0}$  是  $\mathbb{T}_{\rho_0}$  中唯一的管。
- (b) 对每个  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}_{\rho_i}$ ， $(\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_i}}, Y_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_i}})_{\rho_{i+1}/\rho_i}$  是  $\gtrsim (\log 1/\delta)^{-2^N} \delta^\eta$ -稠密的；且  $(Y_{\rho_J}, \mathbb{T}_{\rho_J})_\delta$  是  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  的一个  $\gtrsim (\log 1/\delta)^{-2^N}$  精化。
- (c) 结论 (B) 的 (iii) 仍成立，只是误差从  $\delta^{-\varepsilon_2}$  放宽为  $\lesssim (\log 1/\delta)^{2^N} \delta^{-\varepsilon_2}$ 。
- (d) 对每个  $i = 1, \dots, J-1$  和  $T_{\rho_{i-1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i-1}}$ ， $\mathbb{T}_{\rho_i}^{T_{\rho_{i-1}}}$  是  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_{i-1}}}$  的平衡分割覆盖。
- (e) 对每个  $i = 0, \dots, J-1$ ，量

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_i}]} Y_{\rho_{i+1}}(T_{\rho_{i+1}}) \right|$$

对所有  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}_{\rho_i}$  都大致相同（相差至多因子 2）。

(f) 有

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \prod_{i=1}^{J-1} \left( \sup_{T_{\rho_i} \in \mathbb{T}_{\rho_i}} \frac{1}{|T_{\rho_i}|} \left| \bigcup_{T_{\rho_{i+1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_i}]} Y_{\rho_{i+1}}(T_{\rho_{i+1}}) \right| \right). \quad (11.1)$$

(f) 的构造方式是：选取每个  $Y_{\rho_{i+1}}$ ，使并集  $\bigcup_{T_{\rho_{i+1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_i}]} Y_{\rho_{i+1}}(T_{\rho_{i+1}}) \subset Y_{\rho_i}(T_{\rho_i})$  在  $Y_{\rho_i}(T_{\rho_i})$  内半径为  $\rho_i$  的球上具有大致相同的密度（相差至多因子 2）。由上一项，把 (11.1) 中的上确界替换为下确界，右端至多损失因子  $2^J$ 。(a)–(e) 均由二进鸽巢得到，细节从略。

若  $\varepsilon_2$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小，则对每个  $i$  和  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}_{\rho_i}$ ，有

$$\frac{1}{|T_{\rho_i}|} \left| \bigcup_{T_{\rho_{i+1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_i}]} Y_{\rho_{i+1}}(T_{\rho_{i+1}}) \right| \gtrsim \delta^{\varepsilon_1} \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right)^\omega \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_i}} \right) |T_{\rho_{i+1}}| \left( \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_i}} \right) \left( \frac{|T_{\rho_{i+1}}|}{|T_{\rho_i}|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma} \quad (11.2)$$

事实上，(11.2) 来自估计  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$ ；例如当  $\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} < \delta^{\varepsilon_1}$  且  $\varepsilon_2$  相对于  $\omega, \sigma, \varepsilon_1$  足够小时可直接应用。若  $\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \geq \delta^{\varepsilon_1}$ ，则由一个初等事实得到：(11.2) 左端所涉及并集的体积至少为任一  $T_{\rho_{i+1}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_i}]$  的  $Y_{\rho_{i+1}}(T_{\rho_{i+1}})$  的体积。

**步骤 2.** 若  $\rho_{i+1}/\rho_i \geq 2^{-N}\delta^{(1-\omega/100)^N}$ , 称指标  $i$  为 C 型; 此时无需进一步分割。否则, 对每个排列  $(\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_i}}, Y_{\rho_{i+1}}^{T_{\rho_i}})_{\rho_{i+1}/\rho_i}$  应用命题 9.1 (精细尺度归纳), 其中  $\omega, \sigma$  如上, 并取  $\zeta = \varepsilon$ ; 只要  $\varepsilon_2$  相对于  $\omega, \sigma, N, \varepsilon$  足够小即可。若对至少一个  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}_{\rho_i}$ , 命题的结论 (A) 成立, 则称指标  $i$  为 A 型; 否则称其为 B 型。

假设至少存在一个 A 型指标, 记为  $i_0$ 。令  $\alpha_2 = \alpha_2(\omega, \sigma, \varepsilon)$  为命题 9.1 的输出。对每个  $i \neq i_0$  应用 (11.2), 对  $i_0$  的贡献使用命题 9.1 的结论 (A), 并用 (11.1) 合并这些估计, 得到

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| &\gtrsim \prod_{\substack{i=1, \dots, J-1 \\ i \neq i_0}} \left( \delta^{\varepsilon_1} \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right)^\omega \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_i}} \right) |T_{\rho_{i+1}}| \left( \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_i}} \right) \left( \frac{|T_{\rho_{i+1}}|}{|T_{\rho_i}|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma} \right) \\ &\quad \cdot \left( \delta^{\varepsilon_1} \left( \frac{\rho_{i_0+1}}{\rho_{i_0}} \right)^{\omega-\alpha_2} \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i_0+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_{i_0}}} \right) |T_{\rho_{i_0+1}}| \left( \left( \frac{\#\mathbb{T}_{\rho_{i_0+1}}}{\#\mathbb{T}_{\rho_{i_0}}} \right) \left( \frac{|T_{\rho_{i_0+1}}|}{|T_{\rho_{i_0}}|} \right)^{1/2} \right)^{-\sigma} \right) \\ &\geq \delta^{\varepsilon_1 J} \left( \frac{\rho_{i_0+1}}{\rho_{i_0}} \right)^{-\alpha_2} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma} \\ &\gtrsim \delta^{\varepsilon_1 2^N - \alpha_2(1-\omega/100)^N} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma} \end{aligned} \quad (11.3)$$

因此, 只要选取  $\alpha \leq \frac{1}{2}\alpha_2(1-\omega/100)^N$  和  $\varepsilon_1 < 2^{-N-1}\alpha_2(1-\omega/100)^N$ , 引理 11.1 的结论 (A) 成立。

**步骤 3.** 现在假设每个指标都是 B 型或 C 型。我们证明引理 11.1 的结论 (B)。按从小到大的顺序, 对每个 B 型指标  $i$  执行如下步骤。经过二进鸽巢, 存在  $s \in [(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i})^{1-\frac{\omega}{100}}, (\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i})^{\frac{\omega}{100}}]$  以及子集  $\mathbb{T}'_{\rho_i} \subset \mathbb{T}_{\rho_i}$ , 其中  $\#\mathbb{T}'_{\rho_i} \gtrsim_\delta \#\mathbb{T}_{\rho_i}$ , 使对每个  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}'_{\rho_i}$ , 命题 9.1 输出的 “ $\rho$ ” 都位于  $s$  与  $2s$  之间。定义  $\rho_{i+1/2} = s\rho_i$ 。于是

$$\frac{\rho_{i+1/2}}{\rho_i} \geq s \geq \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right)^{1-\frac{\omega}{100}} \geq (2^{-N+1}\delta^{(1-\omega/100)^{N-1}})^{1-\frac{\omega}{100}} \geq 2^{-N}\delta^{(1-\omega/100)^N}. \quad (11.4)$$

类似地,

$$\frac{\rho_{i+1}}{\rho_{i+1/2}} = \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \frac{\rho_i}{\rho_{i+1/2}} \geq \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \frac{1}{2s} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right)^{1-\frac{\omega}{100}} \geq 2^{-N}\delta^{(1-\omega/100)^N}. \quad (11.5)$$

这验证了引理 11.1 结论 (B) 的 (i)。

令  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1/2}}$  为命题 9.1 所给对应管族的并, 并定义

$$\mathbb{T}'_{\rho_{i+1}} = \bigcup_{T_{\rho_{i+1/2}} \in \mathbb{T}_{\rho_{i+1/2}}} \mathbb{T}_{\rho_{i+1}}[T_{\rho_{i+1/2}}].$$

对每个  $T_{\rho_i} \in \mathbb{T}'_{\rho_i}$ ,  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1/2}}^{T_{\rho_i}}$  关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理与 Frostman 薄板 Wolff 公理, 以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  从上方和下方对  $(\mathbb{T}'_{\rho_{i+1}})^{T_{\rho_i}}$  进行因子分解。这验证了结论 (B) 的 (iii)。

最后, 用连续整数  $1, 2, 3, \dots$  对  $\mathbb{T}'_{\rho_i}$  和  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1/2}}$  重新编号, 并令  $\mathbb{T}' = \mathbb{T}_{\rho_{J'}}$ , 其中  $J'$  为重新编号后的最后一个指标。注意  $J' \leq 2J-1 \leq 2^N$ ; 重新编号后仍有  $\rho_0 = 1$ 、 $\rho_{J'} = \delta$ 。归纳步骤完成。□

**引理 11.2.** 令  $\sigma \in (0, 2/3]$ 、 $\omega, \varepsilon > 0$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。则存在  $\eta, \alpha, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则下列情形至少有一个成立。

$$(A) \quad \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{\omega-\alpha} (\#\mathbb{T}) |T| ((\#\mathbb{T}) |T|^{1/2})^{-\sigma}.$$

(B) 存在  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ , 且该精化在每一尺度都以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理 (见定义 10.1)。

证明. 令  $\varepsilon_1 > 0$  为下文选取的小量。取  $N$  足够大, 使  $(1 - \omega/100)^N < \varepsilon$ 。用该  $N$ 、以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ 、并取上述  $\omega, \sigma$ , 对  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  应用引理 11.1。若该引理结论 (A) 成立, 则本引理结论 (A) 成立, 证明结束。

否则, 引理 11.1 的结论 (B) 成立。经过无害精化, 可假设每个  $\mathbb{T}_{\rho_i}$  是  $\mathbb{T}_{\rho_{i+1}}$  的平衡分割覆盖, 因此  $\mathbb{T}_{\rho_i}$  是  $\mathbb{T}'$  的一个  $2^J \leq \delta^{-\varepsilon}$ -平衡分割覆盖。

我们断言, 只要  $\varepsilon_1$  足够小 (依赖于  $N, \varepsilon$ ), 引理 11.1 输出的  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  在每一尺度都以误差  $\delta^{-\varepsilon}$  满足 Katz–Tao 凸 Wolff 公理。验证如下。由于  $(1 - \omega/100)^N < \varepsilon$ , 对每个  $\rho \in [\delta, 1]$ , 区间  $[\rho, \delta^{-\varepsilon}\rho]$  至少包含一个  $\rho_i$ 。前面已指出,  $\mathbb{T}_{\rho_i}$  满足定义 10.1 的 (i)。还需验证 (ii)。应用引理 4.12, 对每个  $i$  有

$$C_{KT-CW}(\mathbb{T}_i) \lesssim \prod_{j=i+1}^J \delta^{-2\varepsilon_1} \lesssim \delta^{-2^{N+1}\varepsilon_1}.$$

取  $\varepsilon_1$  足够小, 使对所有充分小的  $\delta > 0$ ,  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}_i) \leq \delta^{-\varepsilon}$ 。若  $\delta$  不够小, 则只要  $\kappa > 0$  足够小, 结论 (A) 总成立。□

命题 1.7 的证明. 固定  $\omega, \sigma > 0$ , 并假设  $\mathcal{E}(\sigma, \omega)$  成立。以  $\omega/2$  代替  $\varepsilon$  应用定理 10.2, 令  $\eta_1$  为其输出。再以  $\eta_1$  代替  $\varepsilon$  应用引理 11.2, 令  $\alpha_2, \eta_2, c_2$  为其输出。于是, 对任意  $\delta^{\eta_2}$ -稠密并满足  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta_2}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta_2}$  的  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$ , 有

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \delta^{\omega - \min(\alpha_2, \omega/2)} (\#\mathbb{T}) |T| \left( (\#\mathbb{T}) |T| \right)^{-\sigma}. \quad (11.6)$$

特别地,  $\mathcal{D}(\sigma, \omega - g(\sigma, \omega))$  成立, 其中  $g(\sigma, \omega) = \min(\alpha_2, \omega/2)$ 。□

## 12 管倍增

本节证明定理 1.12。事实上证明稍强的结论。

**定理 1.12'.** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\eta > 0$ , 使得对所有充分小的  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $\mathbb{T}$  为  $\mathbb{R}^3$  中一族  $\delta$ -管。对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 设  $Y(T) \subset T$  且  $|Y(T)| \geq \delta^\eta |T|$ 。令  $R \geq 1$ , 并对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 以  $T_R$  表示  $T$  的  $R$  倍膨胀。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T_R \right| \leq \delta^{-\varepsilon} R^3 \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right|. \quad (12.1)$$

定理 1.12 是取  $Y(T) = T$ 、 $R = 2$  的特殊情形。

证明. **步骤 1.** 首先可假设  $\mathbb{T}$  中所有管均包含在  $B(0, 1)$  中。事实上, 可以用一族重叠次数有界的单位球覆盖  $\mathbb{R}^3$ , 使每根  $T \in \mathbb{T}$  至少包含在其中一个球里。其次可假设  $\mathbb{T}$  中的管本质不同, 特别地  $\#\mathbb{T} \lesssim \delta^{-4}$ 。事实上, 可以把  $\mathbb{T}$  替换为一个极大的本质不同子族, 这只会使 (12.1) 右端改变一个常数因子。

固定  $\varepsilon > 0$ 。对  $i = 1, 2, \dots$ , 按如下方式定义  $\mathbb{T}_i, \mathbb{T}'_i$  和  $\mathcal{W}_i$ 。先令  $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}$ 。令  $\mathbb{T}'_i$  与  $\mathcal{W}_i$  为对  $\mathbb{T}_{i-1}$  应用命题 4.6 的输出, 并定义  $\mathbb{T}_i = \mathbb{T}_{i-1} \setminus \mathbb{T}'_i$ 。一直进行到  $\mathbb{T}_N$  为空。于是  $\mathbb{T} = \bigsqcup_{i=1}^N \mathbb{T}'_i$ 。对每个  $i$ ,

$$\#\mathbb{T}'_i \geq 100^{-3} e^{-100\sqrt{\log(\delta^{-5})}} (\#\mathbb{T}_{i-1}),$$

因此若  $j - i \geq 2 \cdot 100^3 e^{100\sqrt{\log(\delta^{-5})}}$ , 则  $\#\mathbb{T}_j \leq \frac{1}{2}(\#\mathbb{T}_i)$ 。由于  $\#\mathbb{T}_0 \lesssim \delta^{-4}$ , 上述过程至多经过  $\lesssim (\log 1/\delta)(2 \cdot 100^3 e^{100\sqrt{\log(\delta^{-5})}}) \lesssim_\delta 1$  步停止, 即  $N \lesssim_\delta 1$ 。

**步骤 2.** 固定一个指标  $j$ 。为简化记号, 写  $\mathbb{T}' = \mathbb{T}'_j$ 、 $\mathcal{W}' = \mathcal{W}_j$ 。

$\mathcal{W}'$  关于 Katz–Tao 凸 Wolff 公理从上方、关于 Frostman 凸 Wolff 公理从下方对  $\mathbb{T}'$  因子分解, 二者误差均为  $K \leq 100^3 e^{100\sqrt{\log(\delta^{-5})}}$ 。回忆  $\mathcal{W}'$  中棱柱尺寸均相同, 记为  $a \times b \times 1$ 。

令  $\varepsilon_1 > 0$  为下文选取的小量。下一步估计每个  $W \in \mathcal{W}'$  内管并集的体积, 即希望得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'[W]} Y(T) \right| \geq \kappa_0 \delta^{\varepsilon_1} |W|, \quad (12.2)$$

其中  $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon_1) > 0$ 。为此估计  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}'[W]} Y^W(T)^W$  的体积; 后者是尺寸  $\delta/b \times \delta/a \times 1$  的棱柱并。由定理 1.9, 断言  $\mathcal{E}(\varepsilon_1/10, \varepsilon_1/10)$  成立; 再由命题 5.14, 断言  $\mathcal{F}(\varepsilon_1/10, \varepsilon_1/10)$  成立。后者允许估计三边尺寸均不相同的棱柱并。

对每个  $W \in \mathcal{W}'$ , 把估计  $\mathcal{F}(\varepsilon_1/10, \varepsilon_1/10)$  应用于  $((\mathbb{T}')^W, Y^W)_{\delta/b \times \delta/a \times 1}$ 。回忆该估计含有额外项 “ $D$ ”; 但按注 5.6 的情形 3, 此处  $D \sim 1$ 。若  $\eta > 0$  相对于  $\varepsilon_1$  足够小, 则对每个  $W \in \mathcal{W}'$ ,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'[W]} Y^W(T)^W \right| &\geq \kappa_0 \delta^{\varepsilon_1/10} m^{-1} (\#\mathbb{T}'[W]) |T^W| \left( m^{-3/2} \ell(\#\mathbb{T}'[W]) |T^W|^{1/2} \right)^{-\varepsilon_1/10} \\ &\gtrsim_\delta \kappa_0 \delta^{\varepsilon_1/2}, \end{aligned} \quad (12.3)$$

其中  $m = C_{KT-CW}((\mathbb{T}')^W) \lesssim_\delta (\#\mathbb{T}'[W]) \frac{|T|}{|W|} = (\#\mathbb{T}'[W]) |T^W|$ , 且  $\ell = C_{F-SW}((\mathbb{T}')^W)$ 。第二个不等式中, 可粗略地用  $\delta^{-4}$  上界  $\left( m^{-3/2} \ell(\#\mathbb{T}'[W]) |T^W|^{1/2} \right)$ 。对 (12.3) 反向重标度, 并在必要时调整  $\kappa_0$ , 即得 (12.2)。

对每个  $W \in \mathcal{W}'$ , 定义  $Y(W) = \bigcup_{T \in \mathbb{T}'[W]} T$ ; 则  $Y(W) \subset W$  且  $|Y(W)| \geq \kappa_0 \delta^{\varepsilon_1}$ 。可假设  $\delta > 0$  足够小, 使该量  $\geq \delta^{2\varepsilon_1}$ 。

若  $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon$  足够小, 则对  $(\mathcal{W}', Y)_{a \times b \times 1}$  应用  $\mathcal{F}(\varepsilon/10, \varepsilon/10)$ 。这里  $D$  至多为  $C_{KT-CW}(\mathcal{W}') \lesssim_\delta 1$ , 见注 5.6 情形 2。因此

$$\left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}'} Y(W) \right| \geq \kappa_1 \delta^{\varepsilon/2} (\#\mathcal{W}') |W|. \quad (12.4)$$

结合 (12.2) 与 (12.4), 并恢复原记号, 得到

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'_j} Y(T) \right| \geq \kappa_1 \delta^{\varepsilon/2} \sum_{W \in \mathcal{W}_j} |W|. \quad (12.5)$$

**步骤 3.** 现在合并不同  $j$  的估计 (12.5)。令  $\mathcal{W} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{W}_j$ 。则  $\mathcal{W}$  覆盖  $\mathbb{T}$ , 并且

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq N^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'_j} T \right| \gtrsim_{\delta} \kappa_1 \delta^{\varepsilon/2} \sum_{W \in \mathcal{W}} |W|. \quad (12.6)$$

最后, 由于  $\mathcal{W}$  覆盖  $T$ , 其  $R$  倍膨胀族  $\{RW : W \in \mathcal{W}\}$  覆盖  $\{T_R : T \in \mathbb{T}\}$ 。故

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T_R \right| \leq \left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}} RW \right| \leq \sum_{W \in \mathcal{W}} |RW| = R^3 \sum_{W \in \mathcal{W}} |W|. \quad (12.7)$$

比较 (12.6) 与 (12.7) 即得 (12.1)。  $\square$

## A $\mathbb{R}^3$ 中管族的颗粒分解

本节证明命题 7.15。为方便读者, 先重述该命题。回忆宽广性定义见定义 7.7。其中假设了小参数  $\beta > 0$ , 该参数在第 7.1 节中定义; 那里给出了一个依赖于  $\omega$  和  $\zeta$  的具体取值。本节以下结果则允许  $\beta$  为任意正数 (但在  $\mathbb{R}^n$  中始终取  $\beta \in (0, n-1]$ ), 而后续量如  $\eta, K_1$  可以依赖于  $\beta$ 。因此本节结果可以应用于第 7 节。

**命题 7.15.** 令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $\eta, \kappa > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_{\delta}$  为  $\delta^{\eta}$ -稠密, 并以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。假设  $\mathbb{T}$  中的管都包含在一根公共  $1$ -管  $T_1$  中。

则存在一个  $\delta^{\varepsilon}$  精化  $(\mathbb{T}', Y')$ , 它是  $\delta^{\varepsilon}$ -稠密的, 并以误差  $\leq \kappa^{-1} \delta^{-\varepsilon}$  宽广; 还存在  $\mu \geq 1$ , 使对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T)$ , 都有  $\mu \sum \# \mathbb{T}'_{Y'}(x)$ 。此外, 存在  $c \geq \kappa \mu \delta^{\varepsilon} (\delta \# \mathbb{T})^{-1}$  以及  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$ , 使  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times c \times c}$  是  $(\mathbb{T}', Y')_{\delta}$  关于  $\{T_1\}$  的一个稳健的  $\delta^{\varepsilon}$ -稠密双尺度颗粒分解 (后者只含一根  $1$ -管)。

为了证明命题 7.15, 我们反复应用 Guth–Katz 多项式分割定理 [13], 把  $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$  的一个大部分分解为若干半代数集薄邻域之并。Guth [11, 12] 最先在 Fourier 限制问题中使用这一思想, 随后 Guth 与第二作者 [14] 将其用于挂谷问题。

精确陈述结果前, 先给出若干定义。回忆: 半代数集是由多项式等式与不等式的布尔组合定义的集合  $S \subset \mathbb{R}^n$ 。

定义 A.1. 令  $\rho > 0$ 。厚度为  $\rho$  的半代数颗粒是形如

$$G = N_{\rho}(S),$$

的集合, 其中  $S \subset \mathbb{R}^3$  为半代数集且  $\dim(S) \leq 2$ 。若存在非零多项式  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  使  $S \subset Z(Q)$ , 则称  $G$  由次数至多为  $\deg(Q)$  的多项式定义。

下面回顾 Wongkew [30] 的结果, 用于估计半代数颗粒的体积。

**定理 A.2.** 设  $Z = Z(Q) \subset \mathbb{R}^n$  为维数  $d$  的代数簇,  $B \subset \mathbb{R}^n$  为半径  $r$  的球。则存在仅依赖于  $n$  的常数  $K$ , 使对所有  $0 < \rho \leq r$ ,

$$|N_\rho(Z \cap B)| \leq K(\deg Q)^n \rho^{n-d} r^d.$$

**推论 A.3.** 设  $G \subset \mathbb{R}^3$  为厚度  $\rho$  的半代数颗粒, 并由次数至多为  $D$  的多项式定义。则

$$|G| \lesssim D^3 \rho \operatorname{diam}(G)^2.$$

下面需要一个颗粒分解结果, 它与 [14] 的命题 3.2 类似。

**命题 A.4.** 令  $\varepsilon > 0$ 。则存在  $K_\varepsilon > 0$ , 使下述结论成立。设  $E \subset B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  为开集。则存在

- 一族厚度为  $100\delta$  的半代数颗粒  $\mathcal{G}$ ; 每个颗粒直径  $\leq K_\varepsilon(\#\mathcal{G})^{-1/3}$ , 并由次数至多为  $K_\varepsilon$  的多项式定义。
- 对每个  $G \in \mathcal{G}$ , 存在  $E_G \subset E \cap G$ , 且集合  $\{E_G: G \in \mathcal{G}\}$  两两不交。

此外,

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} |E_G| \geq K_\varepsilon^{-1} \delta^\varepsilon |E|,$$

且对每个  $G \in \mathcal{G}$ ,

$$K_\varepsilon^{-1} \delta^\varepsilon \frac{|E|}{\#\mathcal{G}} \leq |E_G| \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \frac{|E|}{\#\mathcal{G}}.$$

最后, 对任意  $\delta$ -管  $T$ , 有

$$\#\{G \in \mathcal{G}: T \cap E_G \neq \emptyset\} \leq K_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} (\#\mathcal{G})^{1/3}. \quad (\text{A.1})$$

上述结果本质上就是 [14] 的命题 3.2; 区别仅在于 [14] 并未要求  $\mathcal{G}$  中颗粒直径至多为  $K_\varepsilon(\#\mathcal{G})^{-1/3}$ 。加入这一性质很直接: 每一步分割时, 在  $e_1, e_2, e_3$  三个方向额外加入分割平面即可。

利用命题 A.4, 得到如下关于管排列的结构定理。

**引理 A.5.** 令  $\varepsilon, \beta > 0$ 。则存在  $K, \eta > 0$ , 使下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 并以误差  $\delta^{-\eta}$ 、指数  $\beta$  宽广。假设存在  $\mu$ , 使对所有  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$ , 都有  $\#\mathbb{T}_Y(x) \in [\mu, 2\mu]$ 。则存在:

- $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\delta^\varepsilon$  精化  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$ ;
- $\bigcup_{\mathbb{T}} Y'(T)$  的一个分割  $E = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_N$ 。

这些对象具有:

(a) (i)

$$1 \leq N \leq K\delta^{-\varepsilon}(\delta\mu^{-1} \#\mathbb{T})^3. \quad (\text{A.2})$$

(ii)  $r \geq K^{-1}\delta^\varepsilon N^{-1/3}$ .

(b) 每个  $E_i$  的直径至多为  $2r$ , 且体积满足

$$K^{-1}N^{-1}\delta^\varepsilon \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \leq |E_i| \leq K\delta(\text{diam}(E_i))^2. \quad (\text{A.3})$$

(c)  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  以误差  $K\delta^{-\varepsilon}$ 、指数  $\beta$  宽广, 并且对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T)$ , 有  $\#\mathbb{T}'_{Y'}(x) \geq K^{-1}\delta^\varepsilon \mu_0$ .

(d) 对每个  $T \in \mathbb{T}'$ , 存在一族两两  $100r$ -分离的管段  $\{T^{(j)}\}$ , 每个  $T^{(j)} \subset T$  长度为  $r$ , 并满足:

(i) 每个  $T^{(j)}$  都与  $Y'(T)$  相交, 并且  $Y'(T) \subset \bigsqcup T^{(j)}$ .

(ii) 若  $T^{(j)}$  为管段, 则  $T^{(j)} \cap Y'(T)$  恰与一个  $E_i$  相交。

证明.

**步骤 1.** 令  $\varepsilon_1$  为下文选取的小量。令  $\mathbb{T}_1 = \{T \in \mathbb{T}: |Y(T)| \geq \frac{1}{2}\delta^\eta |T|\}$ ,  $Y_1$  为  $Y$  在  $\mathbb{T}_1$  上的限制。则  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $1/2$  精化。对  $E = \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_1(T)$  应用命题 A.4, 其中以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ , 令  $\mathcal{G}$  与  $\{E_G: G \in \mathcal{G}\}$  为输出。

对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ , 至多有  $K_{\varepsilon_1}\delta^{-\varepsilon_1}(\#\mathcal{G})^{1/3}$  个  $G \in \mathcal{G}$  满足  $T \cap E_G \neq \emptyset$ 。定义“显著”颗粒

$$\mathcal{G}_{T, \text{sig}} = \left\{ G \in \mathcal{G}: |T \cap E_G| \geq \left(\frac{1}{2}|Y_1(T)|\right)(K_{\varepsilon_1}\delta^{-\varepsilon_1}(\#\mathcal{G})^{1/3})^{-1} \right\}.$$

则

$$\left| Y_1(T) \cap \bigsqcup_{G \in \mathcal{G}_{T, \text{sig}}} E_G \right| \geq \frac{1}{2}|Y_1(T)|.$$

每个  $Y_1(T) \cap E_G$  都包含在一根长度为  $\text{diam}(T \cap E_G)$  的子管中, 且

$$\delta^{\eta+\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-1} (\#\mathcal{G})^{-1/3} \lesssim \text{diam}(T \cap E_G) \leq K_{\varepsilon_1} (\#\mathcal{G})^{-1/3}.$$

第一个不等式来自体积下界  $|T \cap E_G| \gtrsim \delta^{\eta+\varepsilon_1} |T| K_{\varepsilon_1}^{-1} (\#\mathcal{G})^{-1/3}$ ; 第二个来自命题 A.4 给出的  $G$  的直径上界。

定义

$$r = \kappa \delta^{\eta+\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-1} (\#\mathcal{G})^{-1/3}, \quad (\text{A.4})$$

其中  $\kappa \sim 1$  取到使每个  $T \cap E_G$  的直径至少为  $r$ 。于是对每个  $G \in \mathcal{G}_{T, \text{sig}}$ , 可选取长度为  $r$  的子管  $T_G \subset T$ , 满足

$$|T_G \cap E_G| \gtrsim \delta^{\eta+\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-2} |T \cap E_G| \gtrsim \delta^{2\eta+2\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-3} |T| (\#\mathcal{G})^{-1/3} \gtrsim \delta^{\eta+\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-2} r |T|. \quad (\text{A.5})$$

并且可使集合  $\{T_G: G \in \mathcal{G}_{T, \text{sig}}\}$  中任意两个子管要么重合, 要么内部不交。

由于  $\{E_G\}$  两两不交, 体积下界 (A.5) 表明: 对每根  $T$ , 集合  $\{T_G: G \in \mathcal{G}_{T, \text{sig}}\}$  中至多有  $\delta^{-\eta-\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^2$  根子管可以彼此重合。因此对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ , 可选取  $Y_2(T) \subset Y_1(T)$ , 满足:

•

$$|Y_2(T)| \gtrsim \delta^{2\eta+2\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-4} |Y_1(T)|.$$

- 存在一族  $T$  的长度为  $r$  的子管  $\{T^{(j)}\}$ , 两两  $100r$ -分离。每个  $T^{(j)}$  与  $Y_2(T)$  相交, 并且对每个  $T^{(j)}$ , 恰有一个  $G \in \mathcal{G}$  满足  $Y_2(T) \cap T^{(j)} \cap E_G \neq \emptyset$ 。

**步骤 2.** 步骤 1 处理了管; 本步骤处理  $\mathcal{G}$  中颗粒。固定一个颗粒  $G$ , 用半径  $2r$ 、重叠次数有界的球族  $\{B_i\}$  覆盖  $G$ 。从中选取一个  $100r$ -分离子集 (重编号后记为  $\{B_i\}_{i=1}^M$ , 其中  $M = M(G) \geq 1$ ), 使

$$\sum_{i=1}^M \sum_{T \in \mathbb{T}_1} |Y_2(T) \cap E_G \cap B_i| \gtrsim \sum_{T \in \mathbb{T}_1} |Y_2(T) \cap E_G|. \quad (\text{A.6})$$

由于这些球两两  $100r$ -分离, 每个长度为  $r$  的子管  $T^{(j)}$  至多与其中一个球相交。因此对每个  $T \in \mathbb{T}_1$  和每个  $T^{(j)}$ , 至多有一个上述  $B_i$  满足  $Y_2(T) \cap T^{(j)} \cap E_G \cap B_i \neq \emptyset$ 。

对每个  $G \in \mathcal{G}$  执行上述操作。令  $\mathcal{G}'$  为所有  $B_i \cap G$  的并, 其中  $G$  遍历  $\mathcal{G}$ 。对每个  $G' \in \mathcal{G}'$ , 定义  $E_{G'} = G' \cap E_G$ , 这里  $G \in \mathcal{G}$  是产生  $G'$  的唯一颗粒。集合  $\{E_{G'} : G' \in \mathcal{G}'\}$  两两不交。

定义  $Y_3(T) = Y_2(T) \cap \bigcup_{G' \in \mathcal{G}'} E_{G'}$ 。由 (A.6),  $(\mathbb{T}_1, Y_3)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_1, Y_2)_\delta$  的一个  $\gtrsim 1$  精化, 从而是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\gtrsim \delta^{2\eta+2\varepsilon_1} K_{\varepsilon_1}^{-4}$  精化。此外, 对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ , 仍有一族两两  $100r$ -分离、长度为  $r$ 、与  $Y_3(T)$  相交的子管  $\{T^{(j)}\}$ ; 对每个这样的  $T^{(j)}$ , 恰有一个  $G' \in \mathcal{G}'$  使  $T^{(j)} \cap E_{G'} \neq \emptyset$ 。

**步骤 3.** 令  $\mu' \leq \mu$ , 并令  $(\mathbb{T}_1, Y_4)_\delta$  为  $(\mathbb{T}_1, Y_3)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta 1$  精化, 使对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_4(T)$ ,  $\#(\mathbb{T}_1)_{Y_4}(x) \sim \mu'$ 。由于  $(\mathbb{T}_1, Y_4)_\delta$  是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta \delta^{2\eta+2\varepsilon_1}$  精化,

$$\mu' \gtrsim_\delta \delta^{2\eta+2\varepsilon_1} \mu, \quad (\text{A.7})$$

从而  $(\mathbb{T}_1, Y_4)_\delta$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-3\eta-2\varepsilon_1}$ 、指数  $\beta$  宽广。选取  $\eta, \varepsilon_1$  足够小并取  $K$  足够大, 使其以误差  $\leq K\delta^{-\varepsilon}$  宽广, 且  $\mu' \geq K^{-1}\delta^\varepsilon \mu_0$ 。

对每个  $G' \in \mathcal{G}'$ , 定义  $E'_{G'} = E_{G'} \cap \bigcup_{T \in \mathbb{T}_1} Y_4(T)$ 。经二进鸽巢, 可选取  $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{G}'$ , 使对每个  $G' \in \mathcal{G}''$ ,  $|E'_{G'}|$  大致相同 (相差至多因子 2)。对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ , 定义  $Y_5(T) = Y_4(T) \cap \bigcup_{G'' \in \mathcal{G}''} E'_{G''}$ 。

定义  $N = \#\mathcal{G}''$ 。滥用记号, 把  $\{E'_{G''} : G'' \in \mathcal{G}''\}$  枚举为  $E_1, \dots, E_N$ 。由于  $\#\mathbb{T}_Y(x) \sim \mu$ , 且对每个  $G \in \mathcal{G}$ ,  $K_{\varepsilon_1}^{-1}\delta^{\varepsilon_1} \frac{|E|}{\#\mathcal{G}} \leq |E_G| \leq K_{\varepsilon_1}\delta^{-\varepsilon_1} \frac{|E|}{\#\mathcal{G}}$ , 有

$$\#\mathcal{G} \geq N = \#\mathcal{G}'' \gtrsim_\delta \delta^{2\varepsilon_1} \#\mathcal{G}. \quad (\text{A.8})$$

定义  $\mathbb{T}' = \mathbb{T}_1$ 、 $Y'(T) = Y_5(T)$ 。该  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  满足引理 A.5 的结论 (c)。并且

$$\bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T) = \bigsqcup_{i=1}^N E_i,$$

若常数  $K = K(\varepsilon_1)$  足够大, 则对每个  $i = 1, \dots, N$ ,

$$N^{-1} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \lesssim_\delta N^{-1} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T) \right| \lesssim |E_i| \leq K\delta(\text{diam}(E_i))^2,$$

其中最后一个不等式是推论 A.3。这证明了结论 (b)。此外，对每个  $T \in \mathbb{T}'$ ，已有一族两两  $100r$ -分离、长度为  $r$  的管段  $\{T^{(j)}\}$ 。必要时丢弃部分管段，可假设每个  $T^{(j)}$  与  $Y'(T)$  相交；且对每个保留下来的管段，恰有一个  $i$  使  $Y'(T) \cap T^{(j)} \cap E_i \neq \emptyset$ 。这证明了 (d.i)、(d.ii)。

**步骤 4.** 最后证明结论 (a)。先证 (a.i)，即  $N$  满足 (A.2)。步骤 3 已证明 (d.ii)。结合 (A.4) 与 (A.8)，对每个  $T \in \mathbb{T}$ ，满足  $Y'(T) \cap E_i \neq \emptyset$  的指标  $i$  至多有  $\lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_1} N^{1/3}$  个。因此由鸽巢，存在某个  $i$  使

$$\{\#T \in \mathbb{T} : Y'(T) \cap E_i \neq \emptyset\} \lesssim_\delta \delta^{-2\varepsilon_1} N^{-2/3} (\#\mathbb{T}).$$

固定该  $i$ ，把上述管族记为  $\mathbb{T}_i$ 。有

$$\nu(\{(x, T, T') \in E_i \times \mathbb{T}_i^2 : x \in Y'(T) \cap Y'(T'), \angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T')) \gtrsim_\delta \delta^{(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta}\}) \lesssim_\delta \delta^{3-(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta} (\#\mathbb{T}_i)^2, \quad (\text{A.9})$$

其中  $\nu$  为  $E_i$  上 Lebesgue 测度与  $\mathbb{T}_i^2$  上计数测度的乘积。该不等式来自：若  $T, T' \in \mathbb{T}_i$  且  $\angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T')) \geq \delta^{(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta}$ ，则  $|T \cap T'| \lesssim \delta^{3-(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta}$ 。

另一方面， $|E_i| \gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1} N^{-1} (\mu^{-1} \delta^2 (\#\mathbb{T}))$ ；又因  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-(3\eta+2\varepsilon_1)}$  宽广，对每个  $x \in E_i$ ，至少有  $\gtrsim (\mu')^2$  对  $T, T' \in \mathbb{T}_i$  使  $(x, T, T')$  属于上述集合。因此由 (A.7)，

$$\begin{aligned} \mu \delta^{2+6\eta+4\varepsilon_1} N^{-1} (\#\mathbb{T}) &\lesssim_\delta (\mu')^2 \cdot \left( \delta^{4\eta+2\varepsilon_1} N^{-1} \mu'^{-1} \delta^2 (\#\mathbb{T}) \right) \lesssim \text{左端 (A.9)} \\ &\lesssim \text{右端 (A.9)} = \delta^{-(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta+3} (\#\mathbb{T}_i)^2 \lesssim K_{\varepsilon_1}^2 \delta^{-(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta-4\varepsilon_1+3} N^{-4/3} (\#\mathbb{T})^2. \end{aligned}$$

整理得

$$N^{1/3} \lesssim_\delta K_{\varepsilon_1}^2 \mu^{-1} \delta^{-(3\eta+2\varepsilon_1)/\beta-6\eta-8\varepsilon_1+1} (\#\mathbb{T}).$$

选取  $3\eta + 2\varepsilon_1 < \varepsilon\beta/20$ ，并适当选  $K$ ，即得  $N$  的所需上界。

最后，(a.ii) 直接由  $r$  的定义与 (A.8) 得到。  $\square$

引理 A.5 并未说明集合  $\{E_i\}$  的形状。下面的结果将帮助我们证明：每个  $E_i$  的相当一部分必须包含在某个平面的  $\delta$ -邻域内。其思想是：由于  $E_i$  体积小、每个点  $x \in E_i$  都是宽广的，并且对每根  $T \in \mathbb{T}_i$ ， $E_i \cap T$  都很稠密，可以找到许多由  $\mathbb{T}_i$  中三根管形成的“三角形”，三根管两两在不同点相交。任何三条两两在不同点相交的直线必共面，因此迫使  $E_i$  的一个显著子集呈平面结构。

**引理 A.6.** 令  $\varepsilon, \beta > 0$ 。则存在  $\kappa, \eta > 0$ ，使下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密，并以误差  $\leq \delta^{-\eta}$ 、指数  $\beta$  宽广。假设

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \leq \delta^{1-\eta}.$$

则存在一个平面  $\Pi$ 。若定义  $\mathbb{T}' = \{T \in \mathbb{T} : T \subset N_{2\delta}(\Pi)\}$ ，则存在着色  $\{Y'(T) : T \in \mathbb{T}'\}$  和数  $\mu$ ，满足

(a) 对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T)$ ，有  $\#\mathbb{T}'_{Y'}(x) \sim \mu$ 。

(b)

$$\sum_{T \in \mathbb{T}'} |Y'(T)| \geq \kappa \delta^\varepsilon \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|. \quad (\text{A.10})$$

(c)

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T) \right| \geq \kappa \delta^{1+\varepsilon}, \quad (\text{A.11})$$

证明. 首先经过二进鸽巢并把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  替换为一个精化, 可假设存在  $\mu$ , 使对所有  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$ ,  $\#\mathbb{T}_Y(x) \sim \mu$ ; 此时  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  仍为  $\gtrsim_\delta \delta^\eta$ -稠密, 并以误差  $\lesssim_\delta \delta^{-\eta}$  宽广。注意

$$\delta^{2+\eta}(\#\mathbb{T}) \lesssim_\delta \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)| \lesssim \mu \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \leq \delta^{1-\eta} \mu,$$

因此

$$\#\mathbb{T} \lesssim_\delta \delta^{-1-2\eta} \mu. \quad (\text{A.12})$$

定义

$$\mathbb{T}' = \{T \in \mathbb{T} : |Y(T)| \geq \delta^{2\eta} |T|\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \#\mathbb{T}'_Y(x) \geq \delta^{2\eta} \mu\},$$

$$\mathbb{T}'' = \{T \in \mathbb{T} : |Y(T) \cap E| \geq \delta^{4\eta} |T|\}.$$

双计数给出  $\#\mathbb{T}'' \geq \delta^{5\eta}(\#\mathbb{T})$ 。

对每个  $T_0 \in \mathbb{T}''$  和每个  $x \in Y(T_0) \cap E$ , 至少有  $\frac{1}{2} \delta^{2\eta} \mu$  根  $T \in \mathbb{T}'$  满足  $Y(T) \cap Y(T_0) \neq \emptyset$  且  $\angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T_0)) \geq \delta^{3\eta/\beta}$ 。这是因为与  $Y(T_0)$  相交的  $\mathbb{T}'$  中管至少有  $\delta^{2\eta} \mu$  根, 而由宽广性, 对任意固定向量  $v$ , 通过  $x$  且满足  $\angle(\text{dir}(T), v) \leq \delta^{3\eta/\beta}$  的管至多占相应小比例。特别地, 对每根这样的  $T_0$ , 至少有  $(\delta^{3\eta} \mu)(\delta^{3\eta/\beta} \delta^{-1})$  根不同的  $T \in \mathbb{T}'$  与  $T_0$  相交并满足上述角度下界。由于每根这样的  $T$  满足  $|Y(T)| \geq \delta^{2\eta} |T|$ , 且  $|T \cap N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0)| \leq \frac{1}{2} \delta^{2\eta} |T|$ , 故

$$\sum_{\substack{T \in \mathbb{T}' \\ Y(T) \cap Y(T_0) \neq \emptyset \\ \angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T_0)) \geq \delta^{3\eta/\beta}}} |Y(T) \setminus N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0)| \gtrsim (\delta^{3\eta+3\eta/\beta} \mu \delta^{-1}) (\delta^{2\eta} |T|) \gtrsim \delta^{10\eta/\beta} \delta \mu.$$

另一方面,

$$\left| \bigcup_{\substack{T \in \mathbb{T}' \\ Y(T) \cap Y(T_0) \neq \emptyset \\ \angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T_0)) \geq \delta^{3\eta/\beta}}} Y(T) \setminus N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0) \right| \leq \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \leq \delta^{1-\eta},$$

因此, 若定义  $F_{T_0}$  为  $\mathbb{R}^3 \setminus N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0)$  中满足

$$\sum_{\substack{T \in \mathbb{T}' \\ Y(T) \cap Y(T_0) \neq \emptyset \\ \angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T_0)) \geq \delta^{3\eta/\beta}}} \chi_{Y(T)}(x) \geq \delta^{11\eta/\beta} \mu,$$

的点集, 则由于  $\#\mathbb{T}_Y(x) \lesssim \mu$ , 有  $|F_{T_0}| \geq \delta^{11\eta/\beta+1}$ 。又因  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广, 对每个  $x \in F_0$ , 至少有  $\gtrsim (\delta^{11\eta/\beta}\mu)^2$  对  $T, T' \in \mathbb{T}'$  满足

$$\begin{aligned} Y(T) \cap Y(T_0) &\neq \emptyset, Y(T') \cap Y(T_0) \neq \emptyset, Y(T) \cap Y(T') \neq \emptyset, \\ \angle(\text{dir}(T_0), \text{dir}(T)) &\geq \delta^{3\eta/\beta}, \angle(\text{dir}(T_0), \text{dir}(T')) \geq \delta^{3\eta/\beta}, \angle(\text{dir}(T), \text{dir}(T')) \geq \delta^{12\eta/\beta^2}, \\ (T \cap T') \setminus N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0) &\neq \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

对每一这样的管对,  $|Y(T) \cap Y(T')| \leq |T \cap T'| \lesssim \delta^{3-12\eta/\beta^2}$ 。故固定  $T_0$  后, 满足 (A.13) 的不同管对  $(T, T')$  至少有  $\gtrsim (\delta^{11\eta/\beta}\mu)^2 (|F_{T_0}|/\delta^{3-12\eta/\beta^2}) \gtrsim \delta^{23\eta/\beta^2} \mu^2 \delta^{-2}$  对。因此由 (A.12), 满足 (A.13) 的三元组  $(T_0, T_1, T_2) \in \mathbb{T}'' \times \mathbb{T}' \times \mathbb{T}'$  至少有  $\gtrsim_\delta \delta^{24\eta/\beta^2} (\#\mathbb{T}')^2 (\#\mathbb{T})$  个。

由鸽巢可选取一对  $(T, T')$ , 它属于至少  $\gtrsim_\delta \delta^{24\eta/\beta^2} (\#\mathbb{T})$  个这样的三元组。固定  $T, T'$ , 令  $\mathbb{T}_0$  为使相应三元组满足 (A.13) 的所有  $T_0$ 。于是:

- $T$  与  $T'$  相交, 且夹角  $\gtrsim \delta^{12\eta/\beta^2}$ ;
- 对每个  $T_0 \in \mathbb{T}_0$ ,  $Y(T_0)$  与  $T, T'$  都相交, 并分别与  $T, T'$  成至少  $\delta^{3\eta/\beta}$  的角;
- $(T \cap T') \setminus N_{\delta^{10\eta/\beta}}(T_0) \neq \emptyset$ 。

这些性质蕴含每个  $T_0 \in \mathbb{T}_0$  都包含在某个平面的  $\delta^{1-100\eta/\beta^2}$ -邻域中, 该平面由  $T$  与  $T'$  张成 (严格说该平面只在误差  $\frac{\delta}{Z(\text{dir}(T), \text{dir}(T'))} \leq \delta^{1-11\eta/\beta^2}$  下定义)。因此存在一族至多  $\lesssim \delta^{200\eta/\beta^2}$  个平面  $\{\Pi_i\}$ , 使每个  $T_0 \in \mathbb{T}_0$  都包含在其中某个平面的  $2\delta$ -邻域内。由鸽巢可选取平面  $\Pi$ , 使

$$\sum_{\substack{T \in \mathbb{T}_0 \\ T \subset N_{2\delta}(\Pi)}} |Y(T)| \gtrsim_\delta (\delta^{200\eta/\beta^2}) (\delta^{2+2\eta}) (\delta^{24\eta/\beta^2} (\#\mathbb{T})) \gtrsim_\delta \delta^{300\eta/\beta^2} \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|.$$

定义  $\mathbb{T}' = \{T \in \mathbb{T} : T \subset N_{2\delta}(\Pi)\}$ 。经鸽巢可选取  $\mu'$ , 若定义  $Y'(T) = \{x \in Y(T) : \#\mathbb{T}'_Y(x) \sim \mu'\}$ , 则  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  是  $(\mathbb{T}', Y)_\delta$  的一个  $\approx_\delta 1$  精化。这给出 (a) (以  $\mu'$  代替  $\mu$ ) 及 (b)。最后, (c) 由标准的 Córdoba 型  $L^2$  论证得到, 其中用到  $(\mathbb{T}', Y')_\delta$  以误差  $\delta^{-400\eta/\beta^2}$ 、指数  $\beta$  宽广。□

下面记录引理 A.6 的重标度版本。

**推论 A.7.** 令  $\varepsilon, \beta > 0$ 。则存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使下述结论成立。设  $0 < \delta < r \leq 1$ ,  $B \subset \mathbb{R}^3$  为半径  $r$  的球。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  以误差  $\delta^{-\eta}$ 、指数  $\beta$  宽广; 对每个  $T \in \mathbb{T}$ , 有  $Y(T) \subset B$ , 且  $\sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)| \geq \delta^\eta \delta^2 r (\#\mathbb{T})$ 。再假设  $\mathbb{T}$  中所有管都包含在一根 1-管  $T_1$  中, 且

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \leq r^2 \delta^{1-\eta}.$$

则存在  $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ 、数  $\mu$ 、着色  $Y'(T) \subset Y(T)$  ( $T \in \mathbb{T}'$ ), 以及尺寸可与  $\delta \times r \times r$  比较的棱柱  $P$ , 使每个  $T \in \mathbb{T}'$  与  $P$  相交, 并按注 7.16 的意义从  $P$  的长边退出。此外:

(a) 对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T)$ ,  $\#\mathbb{T}'_{Y'}(x) \sim \mu_0$ .

(b)

$$\sum_{T \in \mathbb{T}'} |Y'(T)| \geq \kappa \delta^\varepsilon \sum_{T \in \mathbb{T}} |Y(T)|. \quad (\text{A.14})$$

(c)

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}'} Y'(T) \right| \geq \kappa \delta^{1+\varepsilon} r^2. \quad (\text{A.15})$$

现在可以证明命题 7.15。概言之，先用引理 A.5 把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个显著部分覆盖为若干互不相交的集合  $\{E_i\}$  之并；再用推论 A.7，把每个  $E_i$  的显著部分困在一个尺寸可与  $\delta \times r \times r$  比较的棱柱  $P_i$  中，其中  $r$  取适当直径。

命题 7.15 的证明.

**步骤 1.** 令  $\delta_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  为下文选取的小数。使  $\delta_0$  相对于  $\varepsilon_1$  很小， $\varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2$  很小，而  $\eta, \kappa$  相对于  $\varepsilon_1$  很小。这些数依赖于  $\varepsilon, \beta$ 。可假设  $\delta \leq \delta_0$ ；否则只要  $\kappa$  足够小使  $\kappa \delta^\varepsilon (\delta \mathbb{T})^{-1} \leq \delta$ ，结论立即成立，此时  $\mathcal{G}$  取为  $\delta \times \delta \times \delta$  球族即可。以下假设  $\delta \leq \delta_0$ 。

经过二进鸽巢并把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  替换为一个  $\sim (\log 1/\delta)^{-1}$  精化，可假设存在  $\mu \geq 1$ ，使对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$ ,  $\#\mathbb{T}_Y(x) \in [\mu, 2\mu)$ ；同时  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  仍以误差  $\delta^{-\eta}$  宽广。

对  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  应用引理 A.5，其中以  $\varepsilon_1$  代替  $\varepsilon$ ， $\beta$  如上；只要  $\eta$  相对于  $\varepsilon_1, \beta$  足够小即可。令  $K_1, N$ 、 $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  和  $E_1, \dots, E_N$  为输出。特别地， $(\mathbb{T}_1, Y_1)$  以误差  $K_1 \delta^{-\varepsilon_1}$  宽广。由 (a)，

$$r \geq K_1^{-2} \delta^{2\varepsilon_1} (\delta \#\mathbb{T})^{-1} \mu. \quad (\text{A.16})$$

令  $I_1$  为满足

$$\#\{T \in \mathbb{T}_1: Y_1(T) \cap E_i \neq \emptyset\} \leq 2N^{-1}r^{-1}(\#\mathbb{T}),$$

的指标集合， $I_2$  为其余指标。对每个  $T \in \mathbb{T}_1$ ，至多有  $(100r)^{-1}$  个  $E_i$  满足  $Y_1(T) \cap E_i \neq \emptyset$ 。故

$$\#I_2 \leq \left(2N^{-1}r^{-1}(\#\mathbb{T})\right)^{-1} \sum_{T \in \mathbb{T}} \#\{i: Y_1(T) \cap E_i \neq \emptyset\} \leq N/2.$$

从而  $\#I_1 \geq N/2$ 。对每个  $i \in I_1$ ，定义

$$\mathbb{T}^{(i)} = \{T \in \mathbb{T}: Y_1(T) \cap E_i \neq \emptyset\}.$$

有

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathbb{T}^{(i)}} |Y_1(T) \cap E_i| &\geq K_1^{-1} \delta^{\varepsilon_1} \mu |E_i| \\ &\geq \mu K_1^{-2} \delta^{2\varepsilon_1} N^{-1} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \\ &\geq K_1^{-1} N^{-1} \delta^{2\varepsilon_1 + \eta} (|T| \#\mathbb{T}) \\ &\geq K_1^{-2} \delta^{2\varepsilon_1 + \eta} N^{-1} (Nr/2) (|T| \#\mathbb{T}^{(i)}) \\ &\geq K_1^{-3} \delta^{3\varepsilon_1 + \eta} (\delta^2 r) (\#\mathbb{T}^{(i)}). \end{aligned}$$

第一步用引理 A.5 的 (c); 第二步用 (A.3); 第三步用  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的  $\delta^\eta$ -稠密性和  $\#\mathbb{T}_Y(x) \sim \mu$ ; 第四步使用  $i \in I_1$ 。

**步骤 2.** 由 (A.3),  $|E_i| \leq K\delta(\text{diam}(E_i))^2$ ; 由引理 A.5 的 (b),  $\text{diam}(E_i) \leq 2r$ 。令  $B_i$  为包含  $E_i$  的半径  $r$  的球。对每个  $T \in \mathbb{T}^{(i)}$ , 定义  $Y^{(i)}(T) = Y_1(T) \cap E_i \subset B_i$ 。若  $\delta_0, \varepsilon_1$  相对于  $\varepsilon_2, \beta$  足够小, 则由步骤 1,  $(\mathbb{T}^{(i)}, Y^{(i)})_\delta$  满足推论 A.7 的假设。应用该推论, 得到一个与  $\delta \times r \times r$  棱柱可比较的  $G_i$ 、一个数  $\mu_i$ 、子集  $\mathbb{T}^{(i)'} \subset \mathbb{T}^{(i)}$ , 以及子着色  $Y^{(i)'}(T) \subset Y^{(i)}(T)$ , 满足:

- 每个  $T \in \mathbb{T}^{(i)'}$  与  $G_i$  相交, 并按注 7.16 的意义从  $G_i$  长端退出;

•

$$\sum_{T \in \mathbb{T}^{(i)'}} |Y^{(i)'}(T)| \geq \kappa_2 \delta^{\varepsilon_2} \sum_{T \in \mathbb{T}^{(i)}} |Y^{(i)}(T)|.$$

•

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}^{(i)'}} Y^{(i)'}(T) \right| \geq \kappa_2 \delta^{1+\varepsilon_2} r^2 \gtrsim \kappa_2 \delta^{\varepsilon_2} |G_i|.$$

- 对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}^{(i)'}} Y^{(i)'}(T)$ ,  $\#\mathbb{T}_{Y^{(i)'}}^{(i)'}(x) \sim \mu_i$

经二进鸽巢, 可选取  $\mu'$  和指标集  $I'_1 \subset I_1$ , 使对每个  $i \in I'_1$ ,  $\mu_i \sim \mu'$ 。选择  $\mu'$ , 使若定义  $\mathcal{G} = \{G_i: i \in I'_1\}$ ,

$$Y(G_i) = \bigcup_{T \in \mathbb{T}^{(i)'}} Y^{(i)'}(T),$$

以及

$$Y_2(T) = Y_1(T) \cap \bigcup_G Y(G),$$

其中第二个并只取满足  $T \in \mathbb{T}^{(i)'}$  的  $G \in \mathcal{G}$ , 则  $(\mathbb{T}_1, Y_2)_\delta$  是  $(\mathbb{T}_1, Y_1)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_2}$  精化, 从而是  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  的一个  $\gtrsim_\delta \delta^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$  精化。

对每个  $G_i \in \mathcal{G}$ ,  $Y(G_i) \subset G_i \cap E_i$ , 故  $\{Y(G): G \in \mathcal{G}\}$  两两不交。此外  $|Y_1(G)| \geq \kappa_2 \delta^{\varepsilon_2} |G_i|$ , 所以  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times r \times r}$  是  $\kappa_2 \delta^{\varepsilon_2}$ -稠密的。

有:

(i)  $\bigcup_{\mathbb{T}} Y_2(T) = \bigsqcup_{G \in \mathcal{G}} Y(G)$ ;

(ii) 若  $Y_2(T) \cap Y(G) \neq \emptyset$ , 则  $T$  按注 7.16 的意义从  $G$  长端退出;

(iii) 若  $Y_2(T) \cap Y(G) \neq \emptyset$ , 则  $Y_2(T) \cap G \subset Y(G)$ 。

(iii) 的理由是: 若对某个与  $E_i$  关联的  $G_i \in \mathcal{G}$ , 有  $Y_2(T) \cap Y(G_i) \neq \emptyset$ , 则存在长度  $r$  的子管  $T^{(j)} \subset T$ , 使  $Y_2(T) \cap T^{(j)} \subset E_i \subset Y(G_i)$ 。由于与  $T$  关联的子管  $\{T^{(j)}\}$  两两  $100r$ -分离, 而  $\text{diam}(G) \leq 10r$ , 该  $T^{(j)}$  是上述集合中唯一与  $G$  相交的子管。

因此  $(\mathcal{G}, Y)_{\delta \times r \times r}$  是  $(\mathbb{T}_1, Y_2)_\delta$  关于单一 1-管  $\{T_1\}$  的稳健  $\kappa_2 \delta^{\varepsilon_2}$ -稠密双尺度颗粒分解。最后,  $r$  的所需下界由 (A.16) 给出。  $\square$

## B Wolff 的发刷论证与命题 1.8 的证明

本节目标是证明命题 1.8。下面以展开形式重述。

**命题 1.8 (展开形式)**. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\kappa, \eta > 0$ , 使得对所有  $\delta > 0$ , 下述结论成立。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。则

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \geq \kappa \delta^{3/2+\varepsilon} (\#\mathbb{T})^{1/2}. \quad (\text{B.1})$$

证明. 证明先用标准的“双线性”或“稳健横截性”论证, 把问题化约到典型相交管对具有大夹角的情形, 即单位向量  $\text{dir}(T)$  与  $\text{dir}(T')$  远离平行; 随后应用 Wolff 的发刷论证。由于这些论证在别处已有详细说明 (例如见 [21, §2.4]), 这里只给出简要梗概。

固定  $\varepsilon > 0$ , 令  $\eta > 0$  为下文选取的小量。设  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  为  $\delta^\eta$ -稠密, 且  $C_{KT-CW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 、 $C_{F-SW}(\mathbb{T}) \leq \delta^{-\eta}$ 。应用标准化约, 可把  $(\mathbb{T}, Y)_\delta$  替换为一个  $\geq \delta^\eta$ -稠密精化, 使下述性质成立: 存在  $\theta \in [\delta, 1]$ , 使对每个  $x \in \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T)$ , 存在向量  $v = v(x)$ , 满足对所有  $x \in Y(T)$  的  $T \in \mathbb{T}$ , 都有  $\angle(v, \text{dir}(T)) \leq \theta$ ; 并且对每个单位向量  $w \in \mathbb{R}^3$  和每个  $r \in [\delta, \theta]$ ,

$$\#\{T \in \mathbb{T}_Y(x), \angle(w, \text{dir}(T)) \leq r\} \leq (r/\theta)^\eta \#\mathbb{T}_Y(x).$$

此外, 存在  $\mathbb{T}$  的一个平衡分割覆盖  $\mathbb{T}_\theta$ , 使

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| = \sum_{T_\theta \in \mathbb{T}_\theta} \left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}[T_\theta]} Y(T) \right|. \quad (\text{B.2})$$

再经精化, 可假设每个  $\mathbb{T}^{T_\theta}$  都是  $\delta^{3\eta}$ -稠密的。注意  $\mathbb{T}^{T_\theta}$  是一族  $\delta/\theta$ -管, 并满足宽广性条件

$$\#\{T^{T_\theta} \in \mathbb{T}_{Y^{T_\theta}}^{T_\theta}(x), \angle(w, \text{dir}(T^{T_\theta})) \leq r\} \leq r^\eta (\#\mathbb{T}_{Y^{T_\theta}}^{T_\theta}(x)),$$

对所有单位向量  $w$  和所有  $r \in [\delta/\theta, 1]$  成立。因此, 对 2-宽广管应用标准的 Wolff 发刷论证 [27], 得到

$$\left| \bigcup_{T_\theta \in \mathbb{T}^{T_\theta}} Y^{T_\theta}(T^{T_\theta}) \right| \gtrsim \delta^{(5/3)(3\eta)} (\delta/\theta)^{1/2} \left( (\delta/\theta) (\#\mathbb{T}^{T_\theta}) \right)^{1/2}.$$

由 (B.2),

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \right| \gtrsim \delta^{5\eta} \delta^{3/2} \theta^{1/2} \sum_{T_\theta \in \mathbb{T}_\theta} (\#\mathbb{T}^{T_\theta})^{1/2} \gtrsim \delta^{5\eta} \delta^{3/2} \theta^{1/2} (\#\mathbb{T}_\theta)^{1/2} (\#\mathbb{T}^{1/2}).$$

最后,  $\#\mathbb{T}[T_\theta] \leq \theta C_{F-SW}(\mathbb{T})(\#\mathbb{T}) \lesssim_\delta \delta^{-2\eta} \theta (\#\mathbb{T})$ , 因而  $\#\mathbb{T}_\theta \gtrsim_\delta \delta^{2\eta} \theta^{-1}$ , 从而得到 (B.1)。  $\square$

## 参考文献

- [1] J. Bennett, A. Carbery, T. Tao. On the multilinear restriction and Kakeya conjectures. *Acta Math.* 196(2): 261–302, 2006.
- [2] A. Besicovitch. Sur deux questions d’integrabilite des fonctions. *J. Soc. Phys. Math.* 2:105–123, 1919.
- [3] J. Bourgain. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. *Geom. Funct. Anal.* 1:147–187, 1991.
- [4] J. Bourgain. On the Erdős-Volkmann and Katz-Tao ring conjectures. *Geom. Funct. Anal.* 13(2): 334–365, 2003.
- [5] R. Davies. Some remarks on the Kakeya problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 69(3): 417–421. 1971.
- [6] A. Cordoba. The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers. *Am. J. Math.* 99:1–22, 1977.
- [7] Z. Dvir, S. Gopi. On the number of rich lines in truly high dimensional sets. Proc. 31st International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2015). 584–598, 2015.
- [8] C. Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math* 94(2): 330–336, 1971.
- [9] L. Guth. Degree reduction and graininess for Kakeya-type sets in  $\mathbb{R}^3$ . *Rev. Mat. Iberoam.* 32(2): 447–494, 2014
- [10] L. Guth. *Polynomial Methods in Combinatorics*, volume 64 of University Lecture Series. American Mathematical Society, 2016.
- [11] L. Guth. A restriction estimate using polynomial partitioning. *J. Amer. Math. Soc.* 29:371–413, 2016.
- [12] L. Guth. A restriction estimate using polynomial partitioning II. *Acta Math.* 221:81–142, 2018.
- [13] L. Guth and N.H. Katz. On the Erdős distinct distances problem in the plane. *Ann. of Math.* 181:155–190, 2015.
- [14] L. Guth and J. Zahl. Polynomial Wolff axioms and Kakeya-type estimates in  $\mathbb{R}^4$ . *Proc. London Math. Soc.* 117:192–220, 2018.
- [15] J. Hickman, K.M. Rogers, R. Zhang. Improved bounds for the Kakeya maximal conjecture in higher dimensions. *Am. J. Math.* 144(6): 1511–1560, 2022.

- [16] N.H. Katz, I. Łaba, T. Tao. An improved bound on the Minkowski dimension of Besicovitch sets in  $\mathbb{R}^3$ . *Ann. of Math.* 152: 383–446, 2000.
- [17] N.H. Katz, T. Tao. Recent progress on the Kakeya conjecture. *Publ. Mat.* 46:161–179, 2002.
- [18] N.H. Katz and T. Tao, New bounds for Kakeya problems. *J. Anal. Math.* 87:231–263, 2002.
- [19] N.H. Katz, S. Wu, J. Zahl. Kakeya sets from lines in  $SL_2$ . *Ars Inven. Anal.*. Paper No. 6, 23 pp, 2023.
- [20] N.H. Katz, J. Zahl. An improved bound on the Hausdorff dimension of Besicovitch sets in  $\mathbb{R}^3$ . *J. Amer. Math. Soc.* 32(1):195–259, 2019.
- [21] N.H. Katz, J. Zahl. A Kakeya maximal function estimate in four dimensions using plane-brushes. *Rev. Mat. Iberoam.* 37(1):317–359, 2021.
- [22] T. Keleti. Are lines much bigger than line segments? *Proc. Am. Math. Soc.* 144(4):1535–1541, 2016.
- [23] T. Keleti and A. Máthé. Equivalences between different forms of the Kakeya conjecture and duality of Hausdorff and packing dimensions for additive complements. [arXiv:2203.15731](https://arxiv.org/abs/2203.15731), 2022.
- [24] T. Tao. Stickiness, graininess, planiness, and a sum-product approach to the Kakeya problem. <https://terrytao.wordpress.com/2014/05/07/stickiness-graininess-planiness-and-a-sum-product-approach-to-the-kakeya-problem>
- [25] H. Wang, J. Zahl. Sticky Kakeya sets and the sticky Kakeya conjecture. [arXiv:2210.09581](https://arxiv.org/abs/2210.09581), 2022.
- [26] H. Wang, J. Zahl. The Assouad dimension of Kakeya sets in  $\mathbb{R}^3$ . [arXiv:2401.12337](https://arxiv.org/abs/2401.12337), 2024.
- [27] T. Wolff. An improved bound for Kakeya type maximal functions. *Rev. Mat. Iberoam.* 11:651–674, 1995.
- [28] T. Wolff. Recent work connected with the Kakeya problem, *Prospects in mathematics* (Princeton, NJ, 1996), 129–162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [29] T. Wolff. A mixed norm estimate for the x-ray transform. *Rev. Mat. Iberoam.* 14:561–601, 1998.
- [30] R. Wongkew. Volumes of tubular neighbourhoods of real algebraic varieties. *Pacific J. Math.* 159:177–184, 1993.
- [31] J. Zahl. New Kakeya estimates using Gromov’s algebraic lemma. *Adv. Math.* 380, 2021.